Fonctions usuelles - complexes - matrices
DM 4

Exercice 1 :

1. Montrez que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser. On note Argsh la bijection réciproque de sh.
2. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\text{ch}^2(\text{Argsh}(x)) = 1 + x^2$$
3. On rappelle que si f^{-1} est dérivable en un point x, alors on a
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$
Justifiez que Argsh est dérivable est dérivable sur son ensemble de définition et précisez sa dérivée.
4. Soit φ définie par $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
   a) Montrez que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. En déduire que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Justifiez que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer φ'.
   c) En déduire une expression explicite de Argsh(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Comme sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}'(x) = \text{ch}(x) \geq 1 > 0$, alors sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\text{sh}(\mathbb{R})$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{sh}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{sh}(x) = -\infty$: la continuité de sh garantit alors que $\text{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   Ainsi sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(\text{Argsh}(x)) - \text{sh}^2(\text{Argsh}(x)) = 1$.
   Or $\text{sh}^2(\text{Argsh}(x)) = x^2$, d'où
$$\text{ch}^2(\text{Argsh}(x)) = 1 + x^2$$
3. La formule est rappelée, mais il faut quand même justifer pourquoi on peut l'appliquer ! Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = \text{ch}(x) \neq 0$, Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ également.
   On a alors $\text{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}(\text{Argsh}(x))}$
   Or d'après la question précédente, $\text{ch}^2(\text{Argsh}(x)) = 1 + x^2$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \geq 0$, on en déduit $\text{ch}(\text{Argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$ et ainsi
$$\boxed{\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$
   Remarque : on sait $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et on vient de trouver $\text{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.... n'est-ce pas un peu magique quand même ?
4. a) Si $x \geq 0$, comme $\sqrt{x^2+1} > 0$, on a immédiatement $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et on va pouvoir élever au carré, qui est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:
$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2+1} > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 > (-x)^2 \\ &\Leftrightarrow 1 > 0 \end{aligned}$$
   Cette dernière égalité est toujours vrai, et on a travaillé par équivalence, donc pour tout $x < 0$, on a bien $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   Alternative express : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geq -x$, c'est à dire $\sqrt{x^2} = |x| \geq -x$.
   Comme $x^2 + 1 > x^2$, on en déduit $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \geq -x$, d'où finalement
$$\sqrt{x^2+1} + x > 0$$
   Comme ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit, par composition, que $\boxed{\varphi \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

b) Par composition, sommes et à nouveau composition de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\\ \varphi'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

c) On reconnait le résultat obtenu à la question 3 et donc $\varphi'(x) = \text{Argsh}'(x)$.
Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \text{Argsh}(x) + C$.
Comme $\varphi(0) = 0$ et $\text{Argsh}(0) = 0$ (puisque $\text{sh}(0) = 0$), on en déduit que $C = 0$ et donc

$$\boxed{\text{Argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}}$$

Exercice 2 :

On considère l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) \quad z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$$

1. Montrez qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que ai est solution de (E).
   En déduire que l'équation (E) admet une unique solution imaginaire pure, et la déterminer. On notera α cette solution.
2. Déterminer deux réels b et c tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = (z-\alpha)(z^2+bz+c)$$

3. Résoudre l'équation :

$$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0$$

1. Supposons $z = ai$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   z est solution de l'équation si et seulement si

$$\begin{aligned}(ai)^3 - (2+i)(ai)^2 + 2(1+i)ai - 2i = 0 &\Leftrightarrow -ia^3 + (2+i)a^2 + 2ai - 2a - 2i = 0\\ &\Leftrightarrow 2a^2 - 2a + i(-a^3 + a^2 + 2a - 2) = 0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a &= 0\\ -a^3 + a^2 + 2a - 2 &= 0\end{cases}\end{aligned}$$

   La première équation donne deux valeurs possibles : $a = 0$ ou $a = 1$.
   Or $a = 0$ n'est pas solution de la seconde équation : le système n'a donc qu'une solution : $a = 1$.
   Ainsi, il existe une unique solution α imaginaire pure à l'équation de départ : $\boxed{\alpha = i}$
2. On cherche b et c tels que : $z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = (z-i)(z^2+bz+c)$
   Immédiatement, on a $c = 2$. Pour b, on peut développer et regarder les termes en z.
   On trouve alors

$$2(1+i)z = 2z - ibz \Leftrightarrow 2 + 2i = 2 - bi$$

   donc $b = -2$.
   On a bien trouvé deux réels b et c (ce qui est rare : ce sont le plus souvent des "vrais" complexes....), et

$$\boxed{z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = (z-i)(z^2-2z+2)}$$

3. On a déjà $\alpha = i$ solution de l'équation.
   De plus, la factorisation précédente donne z solution si et seulement si $z = i$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$
   Le discriminant du trinôme vaut $\Delta = -4$ d'où $z = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ ou $z = 1-i$.
   L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\boxed{S = \{i, 1+i, 1-i\}}$$

Exercice 3 :

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et $A = B - I_3$.

1. Calculez B^2, B^3 et déterminez B^n pour tout $n \geq 3$.
2. En justifiant son utilisation, appliquez la formule du binôme de Newton pour déterminer A^n.
   On pourra, pour faciliter son utilisation ultérieure, écrire A^n sous la forme $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}$

3. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = -1$ et les relations de récurrences :

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{n+1} & = -u_n + 2v_n - w_n \\ v_{n+1} & = -v_n + 2w_n \\ w_{n+1} & = -w_n \end{array}\right.$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Déterminez une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$ et montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$

b) En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

1. On observe que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $B^3 = O_3$ et, par une récurrence immédiate, $\forall n \geq 3$, $B^n = 0_3$.
2. Comme B et $-I_3$ commutent ($B(-I_3) = -B = -I_3 B$), on peut appliquer la formule du binôme de Newton

$$A^n = (B - I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (-I_3)^{n-k}$$

et seuls les trois premiers termes sont conservés :

$$\begin{aligned} A^n &= (-1)^n I + n(-1)^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} B^2 \\ &= (-1)^n \left(I - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2\right) \end{aligned}$$

Au final, on a :

$$\boxed{A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -2n & 2n^2 - n \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. a) On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c'est à dire $M = A$...) et on a bien $X_{n+1} = AX_n$.

   On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} X_n = A^n X_0$.
   Comme $A^0 = I_3$ et que $X_0 = I_3 X_0$, on a l'initialisation .
   Soit $n \geq 0$ et supposons que $X_n = A^n X_0$, alors comme $X_{n+1} = AX_n$ il vient immédiatement

$$X^{n+1} = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$$

   L'hérédité est vérifiée.
   Conclusion : on a bien pour tout $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

   b) Il suffit maintenant de remplacer X_n et A^n par leurs valeurs pour obtenir

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -2n & 2n^2 - n \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n (1 - 2n^2 + n) \\ (-1)^n 2n \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

   D'où $\boxed{u_n = (-1)^n (1 - 2n^2 + n),\ v_n = (-1)^n 2n \text{ et } w_n = (-1)^{n+1}.}$