DEVOIR MAISON 5 - *Suites et séries de fonctions*

Corrigé

EXERCICE 1

Q1. Soir $x \in]0,+\infty[$. Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

Utilisons un développement limité. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$ et $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)$, on a :

$$u_n(x) = x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{x^2-x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$).

Par comparaison, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \textstyle\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction affine $x \mapsto 1 + \dfrac{x}{n}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc par composition, la fonction $x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Par multiplication par la constante -1 puis somme avec la fonction affine $x \mapsto x\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, on en déduit que la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Ainsi :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de fonctions de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$u_n'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$.

On a d'après le développement limité ci-dessus, $\varepsilon_n = -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.

On a donc $|\varepsilon_n| \sim \dfrac{1}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Par comparaison, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n$ converge absolument.

$$\boxed{\textstyle\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n \text{ converge absolument et } \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,+\infty[, \quad u_n'(x) = \dfrac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n.}$$

Q3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a \leqslant b$. Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|u_n'\|_\infty^{[a,b]}$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [a,b]$. On a par inégalité triangulaire :

$$|u_n'(x)| \leqslant \left|\frac{x}{n(n+x)}\right| + |\varepsilon_n| = \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n|.$$

Comme $0 \leqslant x \leqslant b$ et $n(n+x) \geqslant n(n+a) > 0$, on obtient :

$$\frac{x}{n(n+x)} \leqslant \frac{b}{n(n+a)}.$$

Ainsi, $\dfrac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$ est un majorant de l'ensemble $\{|u_n'(x)|, x \in [a,b]\}$ et $\|u_n'\|_\infty^{[a,b]}$ est le plus petit des majorants de cet ensemble donc :

$$\|u_n'\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|.$$

On a de plus $\dfrac{b}{n(n+a)} \sim \dfrac{b}{n^2}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{b}{n^2} \geqslant 0$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{b}{n^2}$ converge donc par comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{b}{n(n+a)}$ converge.

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |\varepsilon_n|$ converge, on en déduit par somme que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|\right)$ converge.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n'\|_\infty^{[a,b]} \geqslant 0$, on en déduit par comparaison par inégalité que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|u_n'\|_\infty^{[a,b]}$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} u_n' \text{ converge normalement sur tout segment } [a,b] \text{ inclus dans }]0,+\infty[.}$$

Q4. (i) Notons $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Vérifions les hypothèses du théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des sommes de séries de fonctions.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (d'après **Q2**).
- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ (d'après **Q1**).
- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.

En appliquant le théorème sur chaque segment de $]0,+\infty[$, on obtient que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $]0,+\infty[$ et donc sur $]0,+\infty[$ (car la classe $\mathscr{C}^1$ est une propriété locale).

Comme la fonction $x \mapsto -\ln x$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, on en déduit par somme que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

(ii) Soit $x \in]0,+\infty[$. Calculons $\varphi(x+1) - \varphi(x)$.

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(x+1) - u_n(x)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
u_n(x+1) - u_n(x) &= (x+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right) - x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\\
&= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+x+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+x}{n}\right)\\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(n+x+1) + \ln n + \ln(n+x) - \ln n\\
&= \ln(n+1) - \ln n + \ln(n+x) - \ln(n+x+1)\\
&= \ln\left(\frac{n+x}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+x+1}{n+1}\right) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right)$ est une série télescopique, on a pour tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right)=\ln\left(1+\frac{x}{1}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{N+1}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)\right)=\ln(1+x)-0=\ln(1+x).$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi(x+1)-\varphi(x)=}-\ln(x+1)+\ln(x)+\ln(1+x)=\boxed{\ln(x).}$$

(iii) On a pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\varphi'(x)=-\frac{1}{x}+S'(x)$.
La fonction $x\mapsto -\frac{1}{x}$ est croissante sur $]0,+\infty[$. Montrons que S' l'est aussi.
Par le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des sommes de séries de fonctions dont les hypothèses ont été vérifiées plus haut, on obtient aussi que :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\ S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n(n+x)}+\varepsilon_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}+\varepsilon_n\right).$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<x\leqslant y$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $0<n+x\leqslant n+y$ donc $\frac{1}{n+x}\geqslant\frac{1}{n+y}$ donc $\frac{-1}{n+x}\leqslant\frac{-1}{n+y}$ donc

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}+\varepsilon_n\leqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{n+y}+\varepsilon_n.$$

Par somme (les séries en jeu sont bien convergentes), on en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}+\varepsilon_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+y}+\varepsilon_n\right)\text{ c'est-à-dire }S'(x)\leqslant S'(y).$$

La fonction S' est donc croissante sur $]0,+\infty[$.
Par somme de deux fonctions croissantes, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction }\varphi'\text{ est croissante sur }]0,+\infty[.}$$

(iv) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $u_n(1)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$.
Ainsi, $\boxed{\varphi(1)=}-\ln(1)+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(1)=\boxed{0.}$

$$\boxed{\text{La fonction }\varphi\text{ vérifie les conditions de (C).}}$$

Q5. Soit $x>0$. On a :

$$h(x+1)-h(x)=\varphi(x+1)-g(x+1)-\varphi(x)+g(x)=(\varphi(x+1)-\varphi(x))-(g(x+1)-g(x))=\ln x-\ln x=0$$

car φ et g vérifient la condition (ii).
Ainsi :

$$\boxed{\forall x>0,\ h(x+1)=h(x).}$$

Comme φ et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (condition (i)), la fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Par composition, la fonction $x \mapsto h(x+1)$ l'est également et a pour dérivée $x \mapsto 1 \times h'(x+1)$.
En dérivant l'égalité encadrée ci-dessus, on obtient alors :

$$\boxed{\forall x > 0,\ h'(x+1) = h'(x).}$$

Q6. On a $h' = \varphi' - g'$ donc $h'(x+p) = \varphi'(x+p) - g'(x+p)$.
Comme φ' et g' sont croissantes sur $]0,+\infty[$ (condition (iii)), on a :

$$\varphi'(p) \leqslant \varphi'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p) \text{ et } g'(p) \leqslant g'(x+p) \leqslant g'(1+p)$$

car $p \leqslant x+p \leqslant 1+p$.
En multipliant par $-1 \leqslant 0$, on a $-g'(1+p) \leqslant -g'(x+p) \leqslant -g'(p)$ puis par somme, on obtient :

$$\boxed{\varphi'(p) - g'(1+p) \leqslant h'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p) - g'(p).}$$

On a $h'(p) = \varphi'(p) - g'(p)$ donc :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) + g'(p) - g'(1+p).$$

Or, pour tout $t \in]0,+\infty[$, $g(t+1) - g(t) = \ln(t)$ (condition (ii)) donc par dérivation, $g'(t+1) - g'(t) = \dfrac{1}{t}$.
En appliquant ceci en p, on obtient :

$$\boxed{\varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.}$$

On a de même :

$$\varphi'(1+p) - g'(p) = \varphi'(1+p) - (\varphi'(p) - h'(p)) = \frac{1}{p} + h'(p)$$

car pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\varphi'(t+1) - \varphi'(t) = \dfrac{1}{t}$. On en déduit :

$$h'(p) - \frac{1}{p} \leqslant h'(x+p) \leqslant h'(p) + \frac{1}{p} \text{ donc } -\frac{1}{p} \leqslant h'(x+p) - h'(p) \leqslant \frac{1}{p}.$$

Ainsi :

$$\boxed{|h'(x+p) - h'(p)| \leqslant \frac{1}{p}.}$$

Q7. Soit $x \in]0,1]$.
D'après **Q5**, la fonction h' est 1-périodique sur $]0,+\infty[$ donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $h'(x+p) = h'(x)$ et $h'(p) = h'(1)$ (par récurrence).
Par la question précédente, on a donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$|h'(x) - h'(1)| \leqslant \frac{1}{p}.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on en déduit que $0 \leqslant |h'(x) - h'(1)| \leqslant 0$ d'où $h'(x) = h'(1)$.
La fonction h' est donc constante sur $]0,1]$.
Comme elle est de plus 1-périodique, on en déduit

$$\boxed{\text{la fonction } h' \text{ est constante sur }]0,+\infty[.}$$

Q8. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $h'(x) = a$.
En intégrant, on en déduit qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $h(x) = ax + b$.
Comme $h(2) = h(1)$ d'après **Q5**, on a $2a + b = a + b$ d'où $a = 0$.
De plus, par la condition (iv), $h(1) = \varphi(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$ d'où $b = 0$.
On en déduit que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $h(x) = 0$ d'où :

$$\boxed{\varphi = g.}$$

Q9. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \prod_{n=1}^{N} \exp\left(u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \prod_{n=1}^{N} \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) \\
&= \prod_{n=1}^{N} \exp\left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2}\right)\exp\left(-\ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\right) \\
&= \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2}\prod_{n=1}^{N}\frac{2n}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Par télescopage, on a $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/2} = \prod_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{1}} = \sqrt{N+1}$.
On a de plus :

$$\prod_{n=1}^{N} 2n = \prod_{n=1}^{N} 2\prod_{n=1}^{N} n = 2^N N!$$

et

$$\prod_{n=1}^{N}(2n+1) = \frac{\displaystyle\prod_{n=1}^{N}(2n+1)\prod_{n=1}^{N}2n}{\displaystyle\prod_{n=1}^{N}2n} = \frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{2N+1}k}{2^N N!} = \frac{(2N+1)!}{2^N N!} = \frac{(2N+1)(2N)!}{2^N N!}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{(2^N N!)^2}{(2N)!}.}$$

Q10. Par la formule de Stirling, on a :

$$\frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{(2^N N!)^2}{(2N)!} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{N}}{2N}\frac{2^{2N}(\sqrt{2\pi N}N^N e^{-N})^2}{\sqrt{2\pi(2N)}(2N)^{2N}e^{-2N}} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\frac{2\pi N}{\sqrt{4\pi N}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Par continuité de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, on en déduit que :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

On a alors :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(\pi) - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

On obtient alors :

$$\psi(1) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi(1) - \frac{1}{2}\ln(\pi) = \varphi(1).$$

Comme φ vérifie la condition (iv), on obtient :

$$\boxed{\psi(1) = 0.}$$

Q11. Montrons que ψ vérifie les conditions de (C).
(i) Comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, par composition et somme, ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

(ii) Soit $x \in]0,+\infty[$. On a :

$$\begin{aligned}\psi(x+1)-\psi(x) &= x\ln(2)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+2}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(\pi)-(x-1)\ln(2)-\varphi\left(\frac{x}{2}\right)-\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln(\pi)\\ &= \ln 2+\varphi\left(\frac{x}{2}+1\right)-\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= \ln 2+\ln\left(\frac{x}{2}\right)=\ln x\end{aligned}$$

car φ vérifie la condition (ii).
(iii) On a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\psi'(x)=\ln 2+\frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{x+1}{2}$ sont croissantes sur $]0,+\infty[$, et à valeurs dans $]0,+\infty[$, et la fonction φ' est croissante sur $]0,+\infty[$ (elle vérifie (iii)) donc par composition puis somme, la fonction ψ' est croissante sur $]0,+\infty[$.
(iv) D'après **Q10**, $\psi(1)=0$.
Ainsi, la fonction ψ vérifie les conditions (C) donc par l'unicité de la solution prouvée à la partie précédente, $\psi=\varphi$ d'où :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[,\ (x-1)\ln(2)+\varphi\left(\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)=\varphi(x)+\frac{1}{2}\ln(\pi).}$$

Exercice 2

I.1.a) Notons $F : x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)}$.
$F \in \mathscr{C}^\infty(]0,1[,\mathbb{R})$ (en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1[$) et $\exp \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc par composition, $g \in \mathscr{C}^\infty(]0,1[)$.
Montrons le résultat demandé par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
Initialisation : $p=0$

$$\forall x \in]0,1[,\ g^{(0)}(x)=g(x)=\frac{Q_0(x)}{(x(x-1))^{2\times 0}}e^{F(x)} \text{ avec } Q_0(x)=1 \in \mathbb{R}[X].$$

La proposition est donc vraie au rang 0.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition vraie au rang p.
En dérivant l'égalité, on obtient pour tout $x \in]0,1[$:

$$g^{(p+1)}(x)=(g^{(p)})'(x)=\frac{Q_p'(x)(x(x-1))^{2p}-Q_p(x)2p(x(x-1))^{2p-1}(2x-1)}{(x(x-1))^{4p}}e^{F(x)}+R(x)$$

$$\text{avec } R(x)=\frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}}e^{F(x)}F'(x) \quad \text{où } F'(x)=\frac{-(2x-1)}{(x(x-1))^2}$$

En regroupant :

$$g^{(p+1)}(x)=e^{F(x)}\frac{Q_p'(x)(x(x-1))^2-2pQ_p(x)(2x-1)(x(x-1))-(2x-1)Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p+2}}$$

On obtient bien :

$$g^{(p+1)}(x)=\frac{Q_{p+1}(x)}{(x(x-1))^{2(p+1)}}e^{F(x)}$$

où Q_{p+1} est la fonction polynômiale définie par :

$$Q_{p+1}(x) = Q_p'(x)x^2(x-1)^2 - (2x-1)Q_p(x)\left(2px(x-1)+1\right).$$

$\boxed{\text{La proposition est donc vraie pour tout } p \in \mathbb{N} \text{ et on a pour tout entier } p \geqslant 1 :}$

$$\boxed{Q_p = X^2(X-1)^2 Q_{p-1}' - (2X-1)\left(2(p-1)X(X-1)+1\right)Q_{p-1}.}$$

I.1.b) Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Q_p est de degré $3p-2$.
Initialisation : $p = 1$
Comme $Q_0 = 1$, on a $Q_1 = X^2(X-1)^2 \times 0 - (2X-1)\left(2(1-1)X(X-1)+1\right) \times 1 = -2X+1$ donc $\deg(Q_1) = 1 = 3 \times 1 - 2$.
La proposition est donc vraie au rang 1.
Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que que le polynôme Q_p de degré $3p-2$.
Notons que $3p-2 \geqslant 1$ donc $\deg(Q_p') = 3p-2-1 = 3p-3$.
Comme $Q_{p+1} = X^2(X-1)^2Q_p' - (2X-1)\left(2pX(X-1)+1\right)Q_p$, le polynôme Q_{p+1} apparaît comme la somme de deux polynômes de degrés $4+3p-3 = 3p+1$ pour le premier et $1+2+3p-2 = 3p+1$ pour le deuxième.
En notant C_p le cœfficient dominant de Q_p, le cœfficient de Q_{p+1} devant X^{3p+1} est donné par :

$$(3p-2)C_p - 2 \times 2pC_p = -(p+2)C_p \neq 0.$$

On en déduit que $\deg(Q_{p+1}) = 3p+1 = 3(p+1)-2$.
La proposition est donc vraie au rang $p+1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^*,\ Q_p \text{ est de degré } 3p-2.}$$

I.2.a) Soit $p \in \mathbb{N}$.
Comme Q_p est une fonction polynômiale, elle a une limite finie en 0 que l'on note ℓ.
On a par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (-F(x)) = +\infty$.
Comme par croissances comparées, $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{y^{2p}}{e^y} = 0$, on obtient par composition :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(-F(x))^{2p}}{e^{-F(x)}} = 0 \text{ c'est-à-dire } \lim_{x \to 0^+} (F(x))^{2p} e^{F(x)} = 0.$$

En utilisant la formule définissant $g^{(p)}$, on obtient par produit :

$$\lim_{x \to 0^+} g^{(p)}(x) = \ell \times 0 = 0.$$

On raisonne de même en 1^- : $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} (F(x))^{2p}e^{F(x)} = 0$ et Q_p a une limite finie en 1 d'où par produit, $\lim\limits_{x \to 1^-} g^{(p)}(x) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x \to 1^-} g^{(p)}(x) = 0.}$$

I.2.b) On rappelle le théorème de limite de la dérivée :
Soit I un intervalle et $a \in I$. Si f est continue sur I et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite finie en a alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, g est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.
Initialisation : $p = 1$
Par les théorèmes généraux, il est clair que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
On a de plus $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0 = g(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$ d'après **I.2.a).**
Donc g est continue en 0 et on montre de même que g est continue en 1. Ainsi, g est continue sur $\mathbb{R}$.

Enfin, comme g est nulle sur $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$, sa dérivée l'est aussi donc on a $\lim\limits_{x\to 0^-} g'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g'(x) = 0$ d'après **I.2.a)** et de même, $\lim\limits_{x\to 1^+} g'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g'(x) = 0$.
Par le théorème de limite de la dérivée (appliqué à la restriction de g sur $]-\infty,\frac{1}{2}]$ puis sur $[\frac{1}{2},+\infty[$), on en déduit que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Hérédité : Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On suppose que g est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.
Par les théorèmes généraux, g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ donc $g^{(p)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ et par hypothèse de récurrence, $g^{(p)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Comme $g^{(p+1)}$ est nulle sur $]-\infty,0[$, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} g^{(p+1)}(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g^{(p+1)}(x) = 0$ d'après **I.2.a).**
De même, $\lim\limits_{x\to 1^+} g^{(p+1)}(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g^{(p+1)}(x) = 0$.
Par le théorème de limite de la dérivée appliqué à $g^{(p)}$, on en déduit que $g^{(p)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc g est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ sur $\mathbb{R}$.
Cela achève la récurrence donc g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et elle est nulle en dehors du segment $[0,1]$ donc :

$$\boxed{g\in\mathscr{W}.}$$

II.1. La fonction g est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0,1]$ (car la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives) avec $0<1$ donc par stricte positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt > 0$. Notons $K = \displaystyle\int_0^1 g(t)dt$.
Comme la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive G sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$h(x) = \frac{G(1)-G(x-1)}{K}.$$

Comme G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G' = g$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, G est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Par composition avec la fonction affine $x\mapsto x-1$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis opérations avec des constantes ($K\neq 0$), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $x\in]-\infty,1]$. On a $x-1\leqslant 0$ et pour tout $t\leqslant 0$, $g(t)=0$ donc :

$$h(x) = \frac{\int_{x-1}^0 g(t)dt + \int_0^1 g(t)dt}{K} = \frac{0+K}{K} = 1.$$

Soit $x\in[2,+\infty[$. On a $x-1\geqslant 1$ et pour tout $t\geqslant 1$, $g(t)=0$ donc :

$$h(x) = \frac{-\int_1^{x-1} g(t)dt}{K} = 0.$$

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est constante égale à 1 sur }]-\infty,1] \text{ et constante égale à 0 sur } [2,+\infty[.}$$

II.2.a) Les fonctions $x\mapsto 2x$ et $x\mapsto -2x$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et h aussi donc par composition puis produit,

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de Leibniz, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^k h^{(k)}(2x)(-2)^{p-k}h^{(p-k)}(-2x)$$

donc

$$\varphi^{(p)}(0) = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}2^k h^{(k)}(0)(-2)^{p-k}h^{(p-k)}(0).$$

Comme h est constante sur $]-\infty, 1[$, toutes ses dérivées successives sont égales à 0 sur cet intervalle donc en particulier pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $h^{(k)}(0) = 0$.
Ainsi, il ne reste que le terme pour $k = 0$:

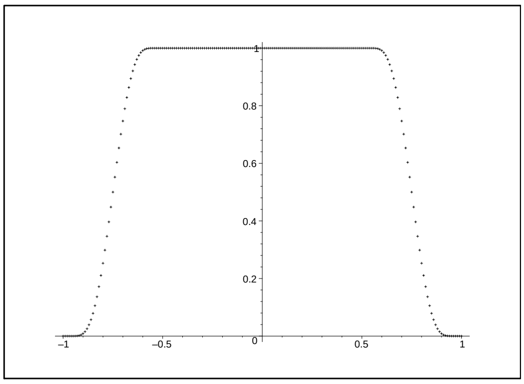
$$\varphi^{(p)}(0) = h(0)(-2)^p h^{(p)}(0) = 0 \text{ car } p \geqslant 1.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } p \geqslant 1,\ \varphi^{(p)}(0) = 0.}$$

II.2.b) Si $x < -1$ alors $-2x > 2$ donc $h(-2x) = 0$ et si $x > 1$ alors $2x > 2$ donc $h(2x) = 0$.
Ainsi, si $x \notin [-1,1]$, $\varphi(x) = h(2x)h(-2x) = 0$ car l'un au moins des facteurs est nul.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est nulle en dehors de } [-1,1].}$$

Notons que la fonction φ est paire car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(-x) = h(-2x)h(2x) = \varphi(x)$.
Étudions φ sur $[0,1]$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $-2x \leqslant 0 \leqslant 1$ donc $h(-2x) = 1$ donc $\varphi(x) = h(2x)$.
Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, on a $2x \leqslant 1$ donc $h(2x) = 1$ donc $\varphi(x) = 1$.
Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $\varphi'(x) = 2h'(2x) = -\dfrac{2g(2x-1)}{K} \leqslant 0$ donc φ est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.
On en déduit l'allure du graphe de φ :



II.2.c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la fonction $|\varphi^{(k)}|$ est une fonction continue sur le segment $[-1,1]$ (par composition de fonctions continues) donc elle est bornée et atteint ses bornes d'où l'existence du réel $\max\limits_{x \in [-1,1]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|$.
L'ensemble $\{\max\limits_{x \in [-1,1]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|, k \in [\![0, p-1]\!]\}$ est alors un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ (de cardinal p), qui admet donc un plus grand élément.

$$\boxed{\text{Pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \text{ le réel } \lambda_p \text{ existe.}}$$

III.1.a) D'après **II.2.a)**, φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions polynômiales $x \mapsto \beta_n x$ et $x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}$ sont aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc par composition et produit, on en déduit que la fonction g_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } g_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

II.1.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $x < -\dfrac{1}{\beta_n}$ alors $\beta_n x < -1$ donc $\varphi(\beta_n x) = 0$ (d'après **II.2.b)**).
De même, si $x > \dfrac{1}{\beta_n}$ alors $\beta_n x > 1$ donc $\varphi(\beta_n x) = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } g_n \text{ est nulle hors du segment } \left[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}\right].}$$

III.2.a) On a $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $f_1 : x \mapsto \varphi(\beta_n x)$ et $f_2 : x \mapsto x^n$.
Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $i \in \mathbb{N}$ avec $i \leqslant n$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1^{(i)}(x) = \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \quad \text{et} \quad f_2^{(i}(x) = n(n-1)...(n-i+1)x^{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!}x^{n-i}.$$

En appliquant la formule de Leibniz et en divisant par $n!$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n^{(j)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} f_1^{(i)}(x) f_2^{(j-i)}(x) \quad (\text{avec } j - i \leqslant j \leqslant n)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x)\frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}.}$$

III.2.b) D'après **II.2.a)**, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(i)}(0) = 0$ donc en utilisant la question précédente avec $x = 0$, il ne reste que le terme pour $i = 0$:

$$g_n^{(j)}(0) = \binom{j}{0}\beta_n^0 \varphi(0)\frac{0^{n-j}}{(n-j)!} = 0$$

car $n - j > 0$.

$$\boxed{g_n^{(j)}(0) = 0.}$$

III.2.c) La fonction g_n est nulle sur $\left]-\infty, -\frac{1}{\beta_n}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{\beta_n}, +\infty\right[$ donc ses dérivées successives sont toutes nulles sur ces intervalles.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > \frac{1}{\beta_n}$, $g_n^{(j)}(x) = 0$.
Comme de plus, $g_n^{(j)}$ est continue en $-\frac{1}{\beta_n}$ et en $\frac{1}{\beta_n}$, on a aussi $g_n^{(j)}\left(-\frac{1}{\beta_n}\right) = g_n^{(j)}\left(\frac{1}{\beta_n}\right) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ tel que } |x| \geqslant \frac{1}{\beta_n},\ g_n^{(j)}(x) = 0.}$$

III.2.d) Soit $i \in [\![0, j]\!]$. Comme la fonction $\varphi^{(i)}$ est nulle en dehors de $[-1, 1]$, on a :

$$\max_{x\in[-1,1]} |\varphi^{(i)}(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(i)}(x)| \leqslant \lambda_n \text{ car } i \in [\![0, n-1]\!].$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant \frac{1}{\beta_n}$.
On a donc pour tout $i \in [\![0, j]\!]$, $|\varphi^{(i)}(\beta_n x)| \leqslant \lambda_n$, $|x|^{n-j+i} \leqslant \frac{1}{\beta_n^{n-j+i}}$ et $(n-j+i)! \geqslant 1$ d'où par inégalité triangulaire :

$$|g_n^{(j)}(x)| \leqslant \frac{\lambda_n}{\beta_n^{n-j}}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \frac{\lambda_n}{\beta_n^{n-j}}2^j$$

par la formule du binôme de Newton.
Comme $n - j \geqslant 1$ et $\beta_n \geqslant 1$, on a $\beta_n^{n-j} \geqslant \beta_n$ d'où :

$$|u_n g_n^{(j)}(x)| \leqslant \frac{|u_n|\lambda_n}{\beta_n}2^j.$$

Comme $\beta_n \geqslant 4^n |u_n| \lambda_n$, on obtient :

$$|u_n g_n^{(j)}(x)| \leqslant \frac{2^j}{4^n} \leqslant \frac{2^{n-1}}{2^{2n}} = 2^{-n-1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ tel que } |x| \leqslant \frac{1}{\beta_n}, \text{ on a } |u_n g_n^{(j)}(x)| \leqslant 2^{-(n+1)}.}$$

III.3. Soit $(n, j) \in \mathbb{N}^2$. On a déjà établi que si $j < n$ alors $g_n^{(j)}(0) = 0$.
Étudions le cas $j \geqslant n$. La formule de Leibniz s'applique encore mais pour tout $k > n$, la dérivée d'ordre k de $x \mapsto x^n$ est nulle. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=j-n}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$$

avec la convention, pour tout réel x, $x^0 = 1$.
On évalue en $x = 0$.
Comme pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(i)}(0) = 0$, lorsque $j > n$, tous les termes de la somme sont nuls donc $g_n^{(j)}(0) = 0$ et lorsque $j = n$, il ne reste que le terme pour $i = 0$:

$$g_n^{(j)}(0) = \varphi(0) \frac{0^0}{0!} = (h(0)^2 = 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } (n, j) \in \mathbb{N}^2,\ \ g_n^{(j)}(0) = \delta_{n,j}.}$$

III.4. Utilisons le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des sommes de séries de fonctions.
Notons pour cette question pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto u_n g_n(x)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisque g_n l'est.
- Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrons que la série $\sum\limits_{n \geqslant j+1} f_n^{(j)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant j + 1$. D'après les questions **III.2.c)** et **III.2.d)**, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n^{(j)}(x)| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ est un majorant de $\{|f_n^{(j)}(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ et $\|f_n^{(j)}\|_\infty^{\mathbb{R}}$ est le plus petit des majorants de cet ensemble donc :

$$\forall n \geqslant j + 1,\ 0 \leqslant \|f_n^{(j)}\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Comme la série $\sum \dfrac{1}{2^{n+1}}$ converge (série géométrique avec $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$), on en déduit par comparaison que la série $\sum\limits_{n \geqslant j+1} \|f_n^{(j)}\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
Ainsi, la série $\sum\limits_{n \geqslant j+1} f_n^{(j)}$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
On peut donc en déduire que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n^{(j)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$ des sommes de séries de fonctions, on en déduit que σ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sigma^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}(x) \text{ et donc } \sigma^{(j)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}(0) = u_j$$

d'après **III.3.**
La fonction σ répond donc au problème donné.

$$\boxed{\text{Il existe une fonction } f \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que pour tout } j \in \mathbb{N},\ f^{(j)}(0) = u_j.}$$