DM6 (Réduction)

Pour le vendredi 6 décembre

Problème 1 (niveau 1) : Matrices semblables

Dans ce problème, on s'intéresse, à travers l'étude de divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables ou ne le sont pas.
Dans toute la suite, n désigne un entier naturel au moins égal à 2.

1. Prouver que deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

2. On se donne les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Comparer la trace, le rang, le déterminant et le polynôme caractéristique de ces deux matrices.
   (b) Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?
   (c) Les matrices A et B sont-elles semblables dans $\mathbb{R}$?
   (d) Pour deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avoir la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique, est-il :
   - une condition nécessaire pour être semblables ?
   - une condition suffisante pour être semblables ?

3. On se donne cette fois :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que $\chi_A = \chi_B$ et prouver que ce polynôme admet trois racines réelles $\alpha < \beta < \gamma$.
   On ne cherchera pas à déterminer la valeur de ces racines.
   (b) Déduire de la question précédente que les matrices A et B sont semblables.

4. Soit α, β deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.
   On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C}).$$

   Dans cette question, il n'est pas autorisé de calculer le polynôme caractéristique de A à l'aide de la définition.
   (a) Calculer le rang de A, en déduire une valeur propre de A et préciser la dimension du sous-espace propre associé.
   (b) Additionner les colonnes de A et en déduire une valeur propre de A (différente de celle trouvée à la question précédente) et un vecteur propre associé.

(c) Montrer que $2(\alpha-\beta)$ est une valeur propre de A.
(d) Montrer que la matrice A est diagonalisable et déterminer une base (V_1, V_2, V_3, V_4) de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de A.
(e) Donner, en justifiant soigneusement, une matrice $P \in GL_4(\mathbb{C})$ et une matrice $D \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

5. **Matrices de rang 1**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1 et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé.
(a) Montrer que la matrice A est semblable à une matrice de la forme :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad \text{où } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}.$$
(b) Montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A).A$.
(c) Exprimer χ_A en fonction de n et de $\operatorname{tr}(A)$.
(d) Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :
   (i) La matrice A est diagonalisable.
   (ii) A admet une valeur propre non nulle.
   (iii) $\operatorname{tr}(A) \neq 0$
   (iv) $A^2 \neq 0_n$

6. **Matrices symétriques**
(a) Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle, symétrique, de trace nulle et de déterminant nul.
(b) Justifier que cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
(c) Existe-t-il une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle, symétrique, de trace nulle et de déterminant nul ?

7. Soit λ, μ, $a \in \mathbb{C}$. Montrer que les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$
sont semblables si et seulement si $\lambda = \mu$ et $a \neq 0$.

8. **Matrices réelles semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$**

Nous allons démontrer que deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: il existe une matrice P, inversible à coefficients complexes, telle que $A = PBP^{-1}$.
On écrit $P = R + iS$, où R et S sont deux matrices à coefficients réels.
(a) Montrer que $RB = AR$ et que $SB = AS$.
(b) Justifier que la fonction $x \in \mathbb{C} \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle.
(c) Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que $R + x_0 S$ soit inversible.
(d) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
(e) **Application.** En utilisant notamment le résultat de la question précédente, montrer que toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme caractéristique $\chi_A = X^3 + X$ est semblable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ à la matrice
$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problème 2 (niveau 2) : Théorème de Perron-Frobenius

Notations

- n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres *complexes* de A et pour $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$, on note $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$. On note $\rho(A) = \max\left\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\right\}$.
- On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* (resp. *strictement positive*) et l'on note $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).
- Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est dit *positif* (resp. *strictement positif*) et l'on note $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$) si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).
- On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $A \geqslant B$ si $A - B \geqslant 0$.
- On définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ par $x \geqslant y$ si $x - y \geqslant 0$.
- On écrit de même $A > B$ si $A - B > 0$ et $x > y$ si $x - y > 0$.
- Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $|A|$ désigne la matrice $|A| = \left(|a_{i,j}|\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, alors $|x|$ désigne le vecteur $|x| = \left(|x_i|\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.
- On dit que $\lambda_0 \in \mathrm{sp}(A)$ est une *valeur propre dominante* de A si $|\lambda_0| > |\lambda|$ pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \smallsetminus \{\lambda_0\}$.

On se propose de démontrer les deux propositions suivantes.

Proposition 1 (Proposition 1)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive, alors $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A. Le sous-espace propre associé $E_{\rho(A)}(A)$ est de dimension 1 et dirigé par un vecteur propre strictement positif.

Proposition 2 (Proposition 2)

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive diagonalisable sur $\mathbb{C}$, si Y est un vecteur positif non nul de $\mathbb{R}^n$, alors $\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$ converge, lorsque p tend vers $+\infty$, soit vers le vecteur nul, soit vers un vecteur directeur strictement positif de $E_{\rho(A)}(A)$.

A. Préliminaires

Q1. Soit z un nombre complexe tel que $|1 + z| = 1 + |z|$. Montrer que $z \in \mathbb{R}_+$.
En déduire que, si z et z' sont deux nombres complexes vérifiant $|z + z'| = |z| + |z'|$ et $z \neq 0$, alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid z' = \alpha z.$$

Q2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes tous non nuls tels que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Montrer que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } z_k = \lambda_k z_1.$$

On pourra appliquer le résultat de la question précédente aux couples (z_1, z_k) pour $k \in [\![2, n]\!]$.

Dans toute la suite, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive.

Q3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} x \geqslant 0 \Longrightarrow Ax \geqslant 0, \\ x \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0 \Longrightarrow Ax > 0. \end{cases}$

Q4. Montrer que $A^k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q5. En déduire que $\rho(A) > 0$ puis montrer que $\rho\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right) = 1$.

Q6. On suppose A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que, si $\rho(A) < 1$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$.

Dans la suite du problème, on admettra que cette dernière implication est vraie même si la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

B. Un résultat intermédiaire

On suppose, dans les parties B et C, que A est une matrice strictement positive vérifiant $\rho(A) = 1$.

On considère une valeur propre complexe λ de A de module 1 et x un vecteur propre associé à λ.
On se propose de démontrer que 1 est valeur propre de A.

Q7. Montrer que $|x| \leqslant A|x|$.

Dans les questions qui suivent, on suppose que $|x| < A|x|$.

Q8. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A^2|x| - A|x| > \varepsilon A|x|$.

Q9. On pose $B = \dfrac{1}{1+\varepsilon}A$. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $B^k A|x| \geqslant A|x|$.

Q10. Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} B^k$.

Q11. Conclure.

C. Preuve de la proposition 1

Q12. Montrer que A admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre 1.

Q13. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1 de A.
On pourra utiliser la question Q2.

Q14. Montrer que $\dim E_1(A) = 1$.

Q15. En regroupant les résultats des parties B et C, justifier que l'on a prouvé la proposition 1.

D. Preuve de la proposition 2

On suppose dans cette partie que A est strictement positive et diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $Y_p = \left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$.

Q16. Soit $\lambda \in S = \mathrm{sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$. Soit $Y \in E_\lambda(A)$. Montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Q17. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur positif. Montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le projeté de Y sur $E_{\rho(A)}(A)$ parallèlement à $\bigoplus_{\lambda\in S} E_\lambda(A)$. Vérifier que, s'il est non nul, ce dernier vecteur (le projeté de Y) est strictement positif.

E. Détermination de la valeur propre dominante

On établit dans cette partie un résultat permettant de déterminer la valeur propre dominante $\rho(A)$ d'une matrice carrée A strictement positive de taille $n \geqslant 2$.

Q18. Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 1$, A^k est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire, dont on précisera les coefficients diagonaux.

Q19. Montrer que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{tr}(A^{k+1})}{\mathrm{tr}(A^k)} = \rho(A)$.