4.4 Cinématique fluides-Exercice 4

On considère des écoulements stationnaires, incompressibles, bidimensionnels parallèles à un plan Oxy.

a-On place dans un fluide une source linéaire dont le débit de volume linéique est λ constant. Cette source coïncide avec la droite ($x = -a, y = 0$). On place également un puits de même débit sur la droite ($x = a, y = 0$).

Calculer le potentiel des vitesses φ, en fonction de λ et des distances respectives r_1 et r_2 à la source et au puits.

b-On fait tendre a vers 0 et λ vers l'infini de telle sorte que la quantité $M = 2\lambda a$ reste finie et non nulle.

Exprimer en coordonnées polaires d'axe Ox la limite du potentiel précédent.

Evaluer les composantes du champ des vitesses en coordonnées polaires.

c-A l'écoulement précédent, on superpose un écoulement uniforme et permanent de vitesse $\vec{u}$ parallèle à l'axe Ox et de même sens.

Déterminer le champ des vitesses résultant en coordonnées polaires.

Montrer qu'il existe une ligne de courant circulaire d'axe Oz, dont on précisera le rayon.
Représenter qualitativement l'allure des lignes de courant.

d-Un cylindre solide immobile d'axe Oz et de rayon R est immergé dans le fluide.
La vitesse du fluide à grande distance de ce cylindre est uniformément égale à $\vec{u}$.
Au contact du cylindre, la vitesse du fluide est tangente au cylindre.

Montrer que l'étude précédente fournit un champ de vitesse irrotationnel correspondant à l'écoulement autour du cylindre. Exprimer ce champ de vitesse en coordonnées polaires à l'aide de u et R.

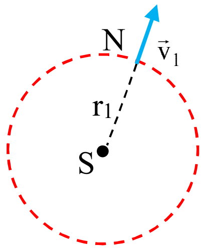
Que vaut la vitesse du fluide le long du cylindre ? Existe-t-il des points de vitesse nulle (points de stagnation) ?

4.4 Cinématique fluides-Exercice 4

---

a-Ecoulement incompressible : conservation du débit volumique entre la source S et le cylindre d'axe Sz, de hauteur 1 m et de rayon r_1 : $\lambda = 2\pi r_1 v_1$

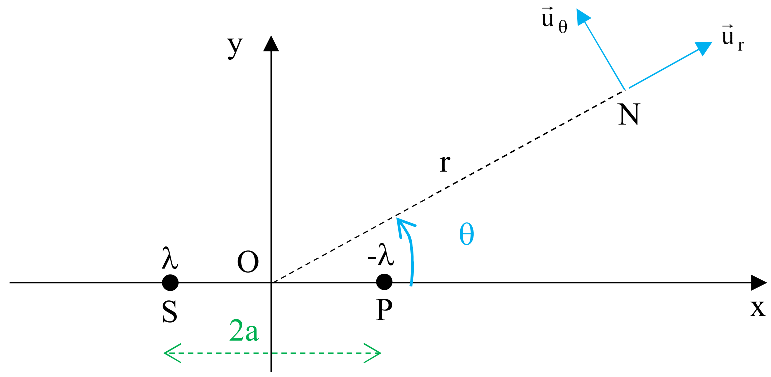
Donc : $v_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi r_1} = \dfrac{d\varphi_1}{dr_1}$ => $\varphi_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi} \mathrm{Ln} r_1 + \text{cons tan te}$



De même pour le puits : $\varphi_2 = -\dfrac{\lambda}{2\pi} \mathrm{Ln} r_2 + \text{cons tan te}$

Au total : $\boxed{\varphi = \dfrac{\lambda}{2\pi} \mathrm{Ln} \dfrac{r_1}{r_2}}$ en prenant $\varphi = 0$ pour $r_1 = r_2$

b-a tend vers 0 donc r >> a, ce qui permet de faire des développements limités de $r_1 = \|\overrightarrow{SN}\|$ et $r_2 = \|\overrightarrow{PN}\|$



On a : $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - a\vec{u}_x$ donc : $\|\overrightarrow{PN}\|^2 = (\vec{r} - a\vec{u}_x)^2 = [r^2 - 2a\vec{r}.\vec{u}_x + a^2] = r^2[1 - \dfrac{2a\cos\theta}{r} + \dfrac{a^2}{r^2}]$

Donc : $r_2 = r[1 - \dfrac{2a\cos\theta}{r} + \dfrac{a^2}{r^2}]^{1/2} \approx r[1 - \dfrac{a\cos\theta}{r}] = r - a\cos\theta$ De même : $r_1 \approx r + a\cos\theta$

D'où : $\varphi = \dfrac{\lambda}{2\pi} \mathrm{Ln} \dfrac{r + a\cos\theta}{r - a\cos\theta} = \dfrac{\lambda}{2\pi} \mathrm{Ln} \dfrac{1 + \frac{a}{r}\cos\theta}{1 - \frac{a}{r}\cos\theta} \approx \dfrac{\lambda}{2\pi}[\dfrac{a}{r}\cos\theta - (-\dfrac{a}{r}\cos\theta)] = \dfrac{2\lambda a\cos\theta}{2\pi r}$ Soit : $\boxed{\varphi = \dfrac{M\cos\theta}{2\pi r}}$

Puis : $\vec{v}(N) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{u}_z$ Soit : $\boxed{\vec{v}(N) = -\dfrac{M\cos\theta}{2\pi r^2}\vec{u}_r - \dfrac{M\sin\theta}{2\pi r^2}\vec{u}_\theta}$

c-On ajoute le champ de vitesse uniforme $\vec{u} = u\vec{u}_x = u(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta)$

Donc : $\boxed{\vec{v}'(N) = \vec{v}(N) + \vec{u} = (u - \dfrac{M}{2\pi r^2})\cos\theta\vec{u}_r - (u + \dfrac{M}{2\pi r^2})\sin\theta\vec{u}_\theta}$

Sur une ligne de courant circulaire de centre O et rayon R, le champ de vitesse doit être <u>orthoradial</u>: $v_r(R,\theta) = 0$

=> $u - \dfrac{M}{2\pi R^2} = 0$ donc le rayon de la ligne de courant circulaire est : $\boxed{R = \sqrt{\dfrac{M}{2\pi u}}}$

d-Le champ de vitesse du fluide doit être égal à $\vec{u}$ loin du cylindre et doit être tangent à la surface du cylindre solide, donc orthoradial pour r = R. C'est le cas avec le champ de vitesse de la question c- construit en superposant l'écoulement uniforme avec l'écoulement de la source et l'écoulement du puits.

Avec $M = 2\pi u R^2$, on trouve : $\boxed{\vec{v}'(N) = u(1 - \dfrac{R^2}{r^2})\cos\theta\vec{u}_r - u(1 + \dfrac{R^2}{r^2})\sin\theta\vec{u}_\theta}$

Vitesse le long du cylindre : $\boxed{\vec{v}'(R,\theta) = -2u\sin\theta\vec{u}_\theta}$ Elle est nulle pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$
