Corrigé du DM 8

1. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et

$$\frac{1}{k} I_n \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\left\|\frac{1}{k} I_n - 0\right\| = \frac{1}{k}\left\|I_n\right\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus $0 \notin Glcn$, donc par caractérisation séquentielle des fermés :

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ n'est pas un fermé de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

b) L'application det est polynomiale en les coefficients de la matrice, c'est à dire en les coordonnées dans la base canonique, donc det est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$.

De plus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(]0\,;+\infty[)$ est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, donc

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ est scindé d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, donc A est trigonalisable. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $T = P^{-1}AP$ et T est triangulaire supérieure, notons $t_1, \dots, t_n$ ses coefficients diagonaux et $\delta = \min\{|t_i|\,; i \in [\![1\,;n]\!], t_i \neq 0\}$; donc $\delta > 0$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*, T_k = T + \frac{\delta}{2k} I_n$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*, T_k$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont : $(t_i + \frac{\delta}{2k})_{i\in[\![1\,;n]\!]}$; soit $i \in [\![1\,;n]\!]$

- si $t_i = 0$, alors le $i^{\text{ième}}$ coefficient diagonal de T_k est $\frac{\delta}{2k} > 0$;
- si $t_i \neq 0$, alors d'après la seconde inégalité triangulaire $\left|t_i + \frac{\delta}{2k}\right| \geqslant |t_i| - \frac{\delta}{2k} \geqslant \delta - \frac{\delta}{2} > 0$, donc le $i^{\text{ième}}$ coefficient diagonal de T_k est non nul.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*, T_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. De plus $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, donc $PT_kP^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

De plus, $\|T_k - T\| = \frac{\delta}{2k}\|I_n\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $T_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} T$.

Et l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc continue. Donc

$$PT_kP^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} PTP^{-1} = A.$$

Donc par caractérisation séquentielle de la densité,

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

le passage par la trigonalisation permet de donner l'idée d'une solution, mais on peut s'en passer. Solution 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\delta = \min\{abs\lambda; \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\}\}$ (ou $\delta = 0$ si cet ensemble est vide). Le minimum est bien défini lorsque l'ensemble est non vide car c'est un ensemble fini.

Alors pour tout $r \in]0\,;\delta[, A - rI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par définition du spectre ($r \notin \mathrm{Sp}(A)$ donc r n'est pas une valeur propre de A). Donc $A \in \overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$. Ce qui achève la solution 2.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) $AB = A(BA)A^{-1}$ donc AB et BA sont semblables, donc :

$$\boxed{AB \text{ et } BA \text{ ont le même polynôme caractéristique.}}$$

b) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$. De plus $M \mapsto MB$ et $M \mapsto BM$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc ces applications sont continues ; donc $A_kB \xrightarrow[k\to+\infty]{} AB$ et $BA_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} BA$. On pose :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C}_n[X] \\ & & M & \longmapsto & \chi_M \end{array}$$

Les fonctions coordonnées de f dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ sont des fonctions polynomiales en les coefficients de M qui sont les coordonnées dans la base canonique. Donc f est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$.

Donc : $f(A_kB) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(AB) = \chi_{AB}$ et $f(BA_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(BA) = \chi_{BA}$.

Or d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $f(A_kB) = \chi_{A_kB} = \chi_{BA_k} = f(BA_k)$.

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{le résultat reste vrai pour tout couple } (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\text{, c'est à dire :}\\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \chi_{AB} = \chi_{BA}.\end{array}}$$

3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A.

a) Soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

$$(AB) \times \mathrm{Com}(AB)^\top = \det(AB) I_n$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Com}(AB) &= \left(\det(AB)(AB)^{-1}\right)^\top \\ &= \det(AB)(B^{-1}A^{-1})^\top \\ &= \det A (A^{-1})^\top \det B (B^{-1})^\top \\ &= \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Com}(A \times B) = \mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B).}$$

b) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telles que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A, B_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} B$.

D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Com}(A_k \times B_k) = \mathrm{Com}(A_k) \times \mathrm{Com}(B_k)$$

Or :

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & & M, N & \longmapsto & MN \end{array}$$

est bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Donc φ est continue.

Donc : $A_k B_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} AB$.

Et les fonctions coordonnées de Com dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont des fonctions polynomiales en les coordonnées dans la base canonique ; donc Com est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donc : $\mathrm{Com}(A_k B_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Com}(AB)$.

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathrm{Com}(A_k B_k) = \mathrm{Com}(A_k)\mathrm{Com}(B_k)$ et par continuité de Com, $\mathrm{Com}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Com}(B)$; puis par continuité de φ :

$$\mathrm{Com}(A_k B_k) = \mathrm{Com}(A_k)\mathrm{Com}(B_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(A).$$

Donc, par unicité de la limite,

$$\boxed{\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Com}(A \times B) = \mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B).}$$

4. A trigonalisable : $A = PTP^{-1}$ avec $t_1, \ldots, t_n$ coeff diagonaux de T.

Pour $\mathcal{D}$ ens des matrices diagonalisables à valeurs propres simples, on pose

$$\delta = \min\left\{|t_k - t_j| ; k, j \in [\![1\,;n]\!], t_k \neq t_j\right\} \text{ et } D = \mathrm{diag}(1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})$$

donc $\forall x \in]0\,;\frac{\delta}{3}[, T + x \cdot D \in \mathcal{D}$ et continuité appli bilinéaire…