Devoir Maison n° 9.
Pour le 25 novembre.

Chapitre 7 exercice 6

Constante d'Euler et développement asymptotique de la série harmonique.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n).$$

3. En déduire un équivalent de $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

4. Montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ converge et donner un équivalent des restes.
On note γ sa somme : on l'appelle la constante d'Euler.

5. Montrer que la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln(n+1)$ converge et préciser sa limite.

6. Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Chapitre 8 exercice 3

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n : x \mapsto n\sin(x)\cos^n(x)$ sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$?

3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout segment de $]0\,;\frac{\pi}{2}]$.