Corrigé du DM 9

Chapitre 7 exercice 6

Constante d'Euler et développement asymptotique de la série harmonique.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante $[k\,;k+1]$, donc : $\forall t \in [k\,;k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant frac1t$, donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$$

donc :

$$\boxed{\begin{gathered}\forall k \in \mathbb{N}^*,\\ \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.\end{gathered}}$$

2. D'après la question précédente et par somme d'intégalités :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc :

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln n$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leqslant 1 + \ln(n).$$

Et de même :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

donc :

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall n \in \mathbb{N}^*,\\ \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n).\end{gathered}}$$

3. On sait que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et $\forall n \geqslant 1, \ln(n) \geqslant H_n - 1$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Donc : $1 \underset{n\to+\infty}{o} (\ln n)$, donc $1 + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$;
et $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})$ avec $\ln(1+\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

4. On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; donc

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc : $\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (à termes positifs).
Donc par comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{la série } \sum \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \text{ converge.}}$$

On note γ sa somme : on l'appelle la constante d'Euler.

De plus, d'après le théorème de sommation des relations de comparaison, en notant R_n le reste d'ordre d'ordre n de cette série :

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

De plus par comparaison série-intégrale avec $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ positive, continue et décroissante sur $[1\,;+\infty[$, pour tout $n, N \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{n+1}^{N} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_n^{N-1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{N} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{(N-1)}$$

Et par passage à la limite ($N \to +\infty$) des inégalités larges :

$$\frac{1}{(n-1)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

Or : $\frac{1}{(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$; donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\boxed{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1) \qquad \text{(somme télescopique)}\end{aligned}$$

Donc u_n est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série convergente de la question précédente. Donc :

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ converge vers } \gamma.}$$

6. Avec les notations des questions précédentes, $R_n + u_n = \gamma$, et $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, donc $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$. Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).}$$

Chapitre 8 exercice 3

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n : x \mapsto n\sin(x)\cos^n(x)$ sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

1. Soit $x \in\ ]0\,;\frac{\pi}{2}]$, donc $\cos(x) \in [0\,;1[$, donc par croissances comparées, $n\cos^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc :

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers la fonction nulle } \theta \text{ sur } [0\,;\tfrac{\pi}{2}].}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par changement de variable $t = \cos(x)$

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (-n)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\cos'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (-n)\int_1^0 t^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} \theta$ sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$; donc $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,\mathrm{d}x = 0$ d'où la contradiction.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \tfrac{n}{n+1}, \text{ la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ne converge pas uniformément sur } [0\,;\tfrac{\pi}{2}].}$$

3. Soit $[a\,;b]$ un segment de $]0\,;\frac{\pi}{2}]$. Pour tout $x \in [a\,;b]$,

$$\cos b \leqslant \cos x \leqslant \cos a$$

Donc, pour tout $x \in [a\,;b]$:

$$|f_n(x)| \leqslant n(\cos(a))^n$$

Donc : $\|f_n\|_{\infty,[a\,;b]} \leqslant n(\cos(a))^n$. Or $0 \leqslant \cos(a) < 1$, donc d'après le théorème des croissances comparées, $n(\cos(a))^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\|f_n - \theta\|_{\infty,[a\,;b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur tout segment de }]0\,;\tfrac{\pi}{2}].}$$