Devoir Maison n° 8.
Pour le 18 novembre.

chapitre 6 exercice 14

1. **a)** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ n'est pas un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   c) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Indication : utiliser la trigonalisation.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   a) Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   b) En utilisant la densité, en déduire que le résultat reste vrai pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A.
   a) Montrer que :
   $$\forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Com}(A \times B) = \mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B).$$
   Indication : utiliser $M \times \mathrm{Com} M^\top = \det(M) I_n$.
   b) En déduire que :
   $$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Com}(A \times B) = \mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B).$$
4. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.