25Résolution d'une équation aux dérivées partielles par la méthode d'Euler

Exemple de l'équation de la chaleur en 1D non stationnaire

Idée de base :

L'idée de base est de discrétiser à la fois l'espace et le temps, et de calculer les dérivées partielles par rapport au temps ou par rapport à l'espace de façon approchée.

Formule de récurrence pour l'équation de la chaleur :

Rappels : En 1D, sans terme de création, $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

- On se fixe un pas temporel `dt` et un pas spatial `dx`.
- Pour représenter la température $T(x,t)$, on cherche à construire un tableau `T[i,j]`.
- Avec la méthode d'Euler, la dérivée temporelle d'ordre 1 est exprimée de façon approchée :

$$\frac{\partial T}{\partial t} \quad <-> \quad \frac{T[i,j+1] - T[i,j]}{dt}$$

- De même, on peut donner une expression approchée de $\frac{\partial T}{\partial x}$, puis de $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.
  → Donner ces expressions.

  → En déduire la formule de récurrence pour l'équation de la chaleur, c'est-à-dire `T[i,j+1]` en fonction de `T[i,j]`, `T[i+1,j]`, `T[i-1,j]`, λ, μ, c, dx, dt.

Choix du pas spatial et du pas temporel :

- On commence par choisir un pas spatial `dx`. Pour cela, on divise la longueur L du domaine spatial étudié en un nombre `Nx-1` d'intervalles `dx`, avec `Nx` suffisamment grand (par exemple 101) pour que la courbe qui donnera T en fonction de x, à t fixé, soit bien lisse. Il y a alors `Nx` valeurs de `x` dans le domaine étudié, y compris 0 et L.
- Ensuite, on choisit `dt` : **il faut que `dt` soit plus petit** (par exemple cinq ou dix fois plus petit) **que le temps caractéristique avec lequel la « chaleur » diffuse sur une distance `dx`**.
- En régime transitoire, le nombre `Nt` d'instants utilisés pour calculer la durée totale T_{tot} (c'est-à-dire `Nt*dt`) de l'étude, doit être assez élevé pour pouvoir observer l'installation du régime stationnaire.
- En régime temporel périodique établi, de période T_{per} , le nombre `Nt` d'instants utilisés pour calculer la durée totale T_{tot} (c'est-à-dire `Nt*dt`) doit être tel qu'on puisse observer plusieurs périodes, typiquement 3 ou 4.

Conditions aux limites possibles :

- Cas d'une température maintenue constante aux deux extrémités, T_1 en $x = 0$, et T_2 en $x = L$:

→ Ecrire ce qu'imposent ces conditions pour certains `T[i,j]`.

- Cas d'une isolation thermique parfaite aux deux bouts, c'est-à-dire en $x = 0$ et en $x = L$:

→ Ecrire ce qu'imposent ces conditions pour certains `T[i,j]`.

Première application : température au sein d'un barre de cuivre de longueur L=0,15 m, soumise à des températures constantes aux deux bouts.

- On part d'une situation initiale avec la barre à une température uniforme de 20°C.
- On impose brutalement, à partir de l'instant $t = 0$, une température de 40°C en $x = 0$, tout en maintenant une température de 20°C en $x = L$.

→ Réaliser un programme python pour déterminer $T(x,t)$ pour $x \in [0, L]$ et $t \geq 0$, en résolvant l'équation de la chaleur. On donne λ =390 $\mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$, $\mu = 8960\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, $c = 385\ \mathrm{J.K^{-1}.kg^{-1}}$.

→ Avec python, tracer $T(x,t)$ en fonction de x pour $x \in [0, L]$, à différents instants choisis.

→ Eventuellement, avec python, construire un film (cf remarque à la fin de cette feuille) donnant $T(x,t)$ en fonction de x pour $x \in [0, L]$, sur une certaine durée, à choisir en fixant la valeur de `Nt`.

Seconde application : température au sein d'un barre de cuivre de longueur L=0,15 m, calorifugée aux deux bouts, avec initialement une répartition de température en triangle, avec 20°C aux deux bouts, et 40°C au milieu.

→ Réaliser un programme python pour déterminer $T(x,t)$ pour $x \in [0, L]$ et $t \geq 0$.

→ Avec python, tracer $T(x,t)$ en fonction de x pour $x \in [0, L]$, à différents instants choisis.

→ Eventuellement, avec python, construire un film donnant $T(x,t)$ en fonction de x pour $x \in [0, L]$, sur une certaine durée, à choisir en fixant la valeur de `Nt`.

Troisième application : effet de peau thermique annuel dans un sous-sol argileux, de profondeur L=20 m.

- On part d'une situation initiale avec le sous-sol à une température uniforme de 15°C.
- On impose pour $t > 0$, une température de surface fluctuant sinusoïdalement (avec une période d'un an) autour de 15°C, avec une amplitude de 5°C, tout en maintenant une température de 15°C en $x = L$.

→ Réaliser un programme python pour déterminer $T(x,t)$ pour $x \in [0, L]$ et $t \geq 0$.

→ Avec python, tracer $T(x,t)$ en fonction de x pour $x \in [0, L]$, à différents instants choisis.

→ Eventuellement, construire un film donnant $T(x,t)$ en fonction de x pour $x \in [0, L]$, sur une certaine durée, correspondant à 3 ou 4 périodes temporelles.

λ =2,2 $\mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$, $\mu \times c = 2{,}2.10^6$ S.I. Période temporelle : 1 an.

Remarque : pour construire une animation à partir d'une fonction mise sous la forme d'un tableau `f[i,j]` :

```python
import matplotlib.pyplot  as plt
import numpy as np
from matplotlib import animation

#exemple de l'animation d'une OPPH
Nx=101 ; Nt=301 ; Lamb=10 ; Periode=0.01 ; L=3*Lamb # constantes
dx=L/(Nx) #pas spatial
dt=Periode/(Nt) #pas temporel
x=np.linspace(0,L,Nx)

f=np.zeros((Nx,Nt)) #création du tableau de la fonction f

for j in range(Nt):
    for i in range(Nx):
        f[i,j]=1.5*np.sin(2*np.pi*(j*dt/Periode-i*dx/Lamb))

fig = plt.figure() # initialise la figure
line, = plt.plot([],[])
plt.xlim(0,L)
plt.ylim(-2,2)
# fonction à définir quand blit=True
def init():
    line.set_data([],[])
    return line,

def animate(j):
    y = f[:,j]
    line.set_data(x, y)
    return line,

ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, init_func=init, frames=300, blit=True, interval=1)
plt.grid(b=True,color='r',linestyle='-')
plt.show()
```