Exercice 1 : trois petits exercices indépendants très proches du TD

1. (a) Déterminez les racines carrées complexes de $1+2\sqrt{2}i$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :
$$z^2+iz-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$
2. Déterminez l'ensemble des complexes $z\neq -1$ tel que $\dfrac{z-1}{z+1}\in\mathbb{R}$.
3. (a) Ecrire sous forme exponentielle le complexe $u=\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.
   (b) En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{-7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{-7\pi}{12}\right)$.

---

1. (a) On cherche $z\in\mathbb{C}$ tel que $z^2=1+2\sqrt{2}i$. En écrivant $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$, on obtient :
$$x^2-y^2+2ixy=1+2\sqrt{2}i$$
Comme de plus $|z|^2=|z^2|=|1+2\sqrt{2}i|$, on déduit que
$$x^2+y^2=3$$
On en déduit $2x^2=4$, $2y^2=2$ et $xy>0$, donc les racines complexes de $1+2\sqrt{2}i$ sont
$$\boxed{z=\sqrt{2}+i \text{ ou } z=-\sqrt{2}-i}$$
   (b) On trouve $\Delta=1+2\sqrt{2}i$ dont les racines complexes ont été déterminée dans la question précédente. On en déduit directement
$$\boxed{z=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } z=\frac{-\sqrt{2}}{2}-i}$$
2. Posons $Z=\dfrac{z-1}{z+1}$. On va utiliser le fait que $Z\in\mathbb{R}\iff\bar{Z}=Z$. Ainsi :
$$\begin{aligned}
Z\in\mathbb{R} &\iff \overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}=\frac{z-1}{z+1}\\
&\iff \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=\frac{z-1}{z+1}\\
&\iff (\bar{z}-1)(z+1)=(z-1)(\bar{z}+1)\\
&\iff \bar{z}z-z+\bar{z}-1=z\bar{z}-\bar{z}+z-1\\
&\iff 2\bar{z}-2z=0\\
&\iff z-\bar{z}=0\\
Z\in\mathbb{R} &\iff 2iIm(z)=0
\end{aligned}$$
Ainsi, l'ensemble des complexes vérifiant cette propriété sont ... les nombres réels (sauf $z=-1$;-)).
3. (a) Comme $|1-i|=\sqrt{2}$, on a $1-i=\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
De même, avec $|1+i\sqrt{3}|=2$, on trouve $1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$
Ainsi $u=\dfrac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}$
C'est à dire $\boxed{u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$

(b) Ecrivons u sous forme algébrique :

$$\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3}\right)$$

Comme on a aussi $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)$,

on en déduit, par unicité de l'écriture algébrique, que : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(-\dfrac{7\pi}{12}) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$,

donc $\boxed{\cos(-\dfrac{7\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3}) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

et avec la partie imaginaire, $\boxed{\sin(-\dfrac{7\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(-1-\sqrt{3}) = \dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

Exercice 2 : trigonométrie réciproque mélangée avec de la trigonométrie hyperbolique

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right)$$

1. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
2. Déterminez l'ensemble de définition de f.
3. Etudiez la parité de f.
4. Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition et calculez f'.
5. Donner le tableau de variation de f, en le complétant par ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
6. Calculez f'' (il est conseillé de simplifier le plus possible f' avant de dériver.) et précisez le signe de $f''(x)$ en fonction de x.
7. Tracez la courbe représentative de f.

---

1. Le plus rapide est d'exploiter les identités remarquables :

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = (\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(x)-\operatorname{sh}(x)) = e^x e^{-x} = 1$$

2. La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, le seul problème est le quotient. Or $\operatorname{sh}(x) = 0 \iff x = 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
3. On va utiliser l'imparité de sh, puis de arctan. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \arctan(\frac{1}{\operatorname{sh}(-x)}) = \arctan(\frac{1}{-\operatorname{sh}(x)}) = -\arctan(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)})$$

Ainsi, $f(-x) = -f(x)$ et f est impaire.

4. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)}\frac{1}{1+\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}} \\ &= -\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)+1} \\ &= -\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}}$.

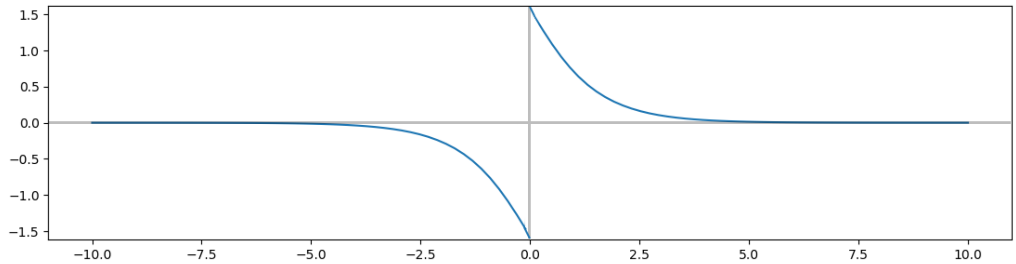
5. Le calcul de limite ne pose pas de difficulté si on connait bien arctan et sh : comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sh}(x) = 0^+$, on en déduit que $\lim\limits_{\to 0^+} \dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)} = +\infty$ et donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

De même en 0^- on obtient
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$
Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont nulles
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$, on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$ $\Vert$ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

6. Si on a écrit la dérivée comme dans ce corrigé, on a facilement $f''(x) = \dfrac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^2(x)}$
   Ainsi $f''(x)$ est du signe de $\text{sh}(x)$, on a $f''(x) \geq 0$ pour $x \in]0, +\infty[$ (donc f y est convexe) et $f''(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty, 0[$, (donc f y est concave).
7. Voici un tracé sous Python :



Bonus : on peut se demander comment on arrive en $\frac{\pi}{2}$: une idée est de regarder la dérivée : comme $\text{ch}(x) \to 1$ quand $x \to 0$, on a $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1$: ça ne veut pas dire que la fonction est dérivable en 0 avec dérivée -1 (f n'est même pas définie en 0 !), mais ça indique que la pente de la fonction s'approche de -1 : tout se passe comme si on avait une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$, ou plutôt deux demi tangente.

On précisera un peu plus cette histoire au second semestre, avec l'aide d'un théorème appelé "theorème des accroissements finis". En considérant des prolongements par continuité à droite et à gauche de f, on peut montrer, via ce "TAF" et le calcul de la limite de f', que ces prolongements sont dérivables à droite et à gauche respectivement. On peut alors déduire des demi-tangentes.

Exercice 3 : Diagonalisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, et soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculez $P^2 - 3P + I_2$. En déduire que P est inversible et calculez P^{-1}.
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculez D et en déduire D^n pour tout $n \geq 0$.
3. Montrez que $A^n = PD^nP^{-1}$, et en déduire l'expression de A^n.

---

1. On trouve $P^2 - 3P + I_2 = O_2$, ce qui permet d'écrire que $P^2 - 3P = -I_2$, d'où $P(P - 3I_2) = -I_2$ et finalement
$$P(3I_2 - P) = I_2$$
Ainsi P est inversible, et son inverse est
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Le calcul donne $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comme D est diagonale, on peut dire directement que
$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$
3. On montre cette propriété par récurrence.
Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I_2$ et $PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$.
Hérédité : soit $n \geq 0$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$.
Alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}A$
Or $D = P^{-1}AP$, donc en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on obtient $PDP^{-1} = A$.
AInsi, $A^{n+1} = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.
La propriété est bien héréditaire.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.
Il reste à calculer tout ça et on obtient
$$A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Utilisation de matrices nilpotentes

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 2$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = & au_n + v_n \\ v_{n+1} = & av_n + w_n \\ w_{n+1} = & aw_n \end{cases}$$

Soit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

1. Déterminez une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \geqslant 0$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
3. En écrivant A sous la forme $A = D + N$ avec D diagonale et N nilpotente, calculez A^n pour tout $n \geq 0$.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de u_n en fonction de n et de a.

---

1. On pose $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
On a alors $AX_n = \begin{pmatrix} au_n + v_n \\ av_n + w_n \\ aw_n \end{pmatrix}$ et par définition de nos trois suites, on trouve bien $AX_n = X_{n+1}$

2. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
   Initiatlisation : On a bien $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_O$
   Herédité : Soit $n \geq 0$. On suppose $X_n = A^n X_0$.
   Alors $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0$, c'est à dire $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
   Conclusion : on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Il suffit de voir que $A = aI_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   On a donc $D = aI_3$ qui est diagonale, et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est telle que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^n = O_3$ pour tout $n \geq 3$. Ainsi N est bien nilpotente.
   Comme $DN = aI_3 N = aN = aNI_3 = NaI_3 = ND$, on peut utiliser le binôme de Newton et on obtient

$$\begin{aligned} A^n = (aI_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI_3)^{n-k} N^k \\ &= (aI_3)^n + n(aI_3)^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} (aI_3)^{n-2} N^2 + O_3 \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{1}{2} n(n-1) a^{n-2} \\ & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Il suffit de calculer $A^n X_0$ et d'identifier, ce qui donne $\boxed{u_n = na^{n-1} + n(n-1)a^{n-2}}$.

Exercice 5 : un exo un peu plus "complexe"

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$f : z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

1. Déterminez l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$.
2. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Déterminez $f(\mathbb{U})$.

---

1. On résout $f(z) = z$ pour $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} z = \frac{1}{2}(\frac{1}{z} + z) &\iff 2z = \frac{1}{z} + z \\ &\iff 2z^2 = 1 + z^2 \iff z^2 = 1 \\ &\iff \boxed{z = 1 \text{ ou } z = -1} \end{aligned}$$

2. Soit $z \in \mathbb{U}$, alors $|z| = 1$, donc en particulier $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
   Ainsi, $f(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = Re(z)$.
   On en déduit que $f(\mathbb{U})$ est l'ensemble des parties réelles des nombres de module 1, c'est à dire $\boxed{f(\mathbb{U}) = [-1; 1]}$.
   Alternative : on peut aussi écrire $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Alors avec la formule d'Euler, on obtient $f(z) = \cos(\theta)$ et donc $f(\mathbb{U}) = \cos(\mathbb{R}) = [-1; 1]$.