MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2024/2025.

DL n° 2.

vendredi 29 novembre.

À rendre le mercredi 4 décembre.

Exercice 1 On pose, pour tout entier $n > 0$, $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrez que pour tout $x \geqslant 0$, $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(x+1) \leqslant x$.
2. En déduire que pour tout $k \geqslant 1$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$, puis que pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. On pose pour tout entier $n > 0$, $u_n = h_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$. Montrez que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
4. On appelle γ (constante d'Euler) leur limite commune. Montrez que
$$h_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$
5. Déterminez un encadrement de
$$\varepsilon_n = h_n - \ln(n) - \gamma,$$
(pour $n > 0$), et en déduire $h_n = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$.
6. Soit $\varepsilon > 0$. Donnez une valeur approchée de γ à ε près, *i.e.* un réel r *ne s'exprimant pas en fonction de* γ tel que $-\varepsilon \leqslant r - \gamma \leqslant \varepsilon$.