Théorème de Cayley-Hamilton et lemme de décomposition des noyaux (Réduction)

I. Deux démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton

Méthode 1 : par les matrices compagnons (version endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Q1 Dans cette question uniquement, on suppose que x est un vecteur de E tel que la famille $\mathscr{B} = \big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Calculer le polynôme caractéristique de f.

c) En déduire $\chi_f(f)(x)$.

Q2 On revient au cas général, en supposant que x est un vecteur quelconque de E non nul.

a) Montrer qu'il existe un entier k compris entre 1 et n tel que $\mathscr{F} = \big(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\big)$ est libre et $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est stable par f.

b) Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B} = \big(e_0, \dots, e_{n-1}\big)$ de E telle que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $e_j = f^j(x)$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

c) Montrer que $\chi_f(f)(x) = 0_E$.

Q3 Conclure.

Méthode 2 : par trigonalisation (version matricielle)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On voit A comme une matrice à cœfficients complexes et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.

Q4 Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les cœfficients diagonaux de T.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $P_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$.

Q5 Donner l'expression de χ_A en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Q6 Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1)$, $P_1(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Q7 Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose $\mathscr{P}(k)$: $\forall x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k),\ P_k(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, $P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

b) Montrer que $(u - \lambda_{k+1}\text{id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

c) En déduire que $P_{k+1}(u)(e_{k+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

d) En déduire $\mathscr{P}(k+1)$: $\forall x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}),\ P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Q8 Conclure.

II. Lemme de décomposition des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Soit u un endomorphisme de E.
On considère le polynôme $P = \prod_{k=1}^{d}(X - \lambda_k)$ où $d \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont d éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
On note $L_1, \dots, L_d$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_d$.
Le but de cet exercice est de prouver l'égalité :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{j=1}^{d} \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id}_E).$$

Q1 Soit $j \in [\![1, d]\!]$. Montrer que $\text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(P(u))$.

Il reste à prouver que la somme est directe et qu'on a $\text{Ker}(P(u)) \subset \bigoplus_{j=1}^{d} \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id}_E)$.
Soit $x \in \text{Ker}(P(u))$. On souhaite donc montrer qu'il existe un unique d-uplet $(x_1, \dots, x_d)$ de vecteurs de E vérifiant pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, $x_j \in \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id}_E)$ et $x = \sum_{j=1}^{d} x_j$.
On raisonne pour cela par analyse-synthèse.

Q2 $\boxed{\textit{Analyse}}$
On suppose que $x_1, \dots, x_d$ sont d vecteurs de E vérifiant pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, $x_j \in \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id}_E)$ et $x = \sum_{j=1}^{d} x_j$.

(a) Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(u)(x) = \sum_{j=1}^{d} Q(\lambda_j) x_j$.

(b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $x_k = L_k(u)(x)$.

Q3 $\boxed{\textit{Synthèse}}$
On pose pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, $x_j = L_j(u)(x)$.

(a) Pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, exprimer le polynôme $(X - \lambda_j)L_j$ en fonction de P et en déduire que $x_j \in \text{Ker}(u - \lambda_j \text{Id}_E)$.

(b) Que vaut $\sum_{j=1}^{d} L_j(u)$? En déduire que $\sum_{j=1}^{d} x_j = x$.

Q4 Conclure.

Q5 *Application :* On suppose que E est de dimension finie et que u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Montrer que u est diagonalisable.

Corrigé

I. Théorème de Cayley-Hamilton - Méthode 1 : par les matrices compagnons

Q1 a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons $u_k = f^k(x)$.
On a pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $f(u_k) = f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) = u_{k+1}$.
Pour $k = n-1$, on a $f(u_{n-1}) = f(f^{n-1}(x)) = f^n(x)$.

Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k$.

On en déduit la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$:

$$\boxed{\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.}$$

Q1 b) Notons $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f)$.

Les polynômes caractéristiques de f et A sont égaux donc $\chi_f = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}$.

Par l'opération $L_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{n} X^{k-1} L_k$, on obtient :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{où } P(X) = -\sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} X^{k-1} + X^{n-1}(X - a_{n-1}).$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\chi_f = (-1)^{n+1} P(X) (-1)^{n-1} = P(X)$$

car le déterminant de taille $n-1$ obtenu est celui d'une matrice triangulaire supérieure dont tous les cœfficients diagonaux valent -1.
Ainsi :

$$\boxed{\chi_f = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.}$$

Q1 c) On a $\chi_f(f) = f^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ donc :

$$\chi_f(f)(x) = f^n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) = f^n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k = 0_E$$

d'après Q1a).
Ainsi :

$$\boxed{\chi_f(f)(x) = 0_E.}$$

Q2 a) Considérons l'ensemble $A = \{\ell \in \mathbb{N}^*, \big(x, f(x), \ldots, f^{\ell-1}(x)\big) \text{ est libre}\}$.
On constate que A est une partie de $\mathbb{N}$ qui a les propriétés suivantes :

- A est non vide car la famille (x) est libre puisque $x \neq 0_E$ donc $1 \in A$,
- A est majorée par n puisque si $\ell \in A$, $\big(x, f(x), \dots, f^{\ell-1}(x)\big)$ est une famille libre de E donc son cardinal, qui est égal à ℓ, est inférieur à la dimension de E, qui est égale à n.

On en déduit que A admet un maximum k qui est compris entre 1 et n.
Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, on note désormais $e_j = f^j(x)$.
Pour tout $j \in [\![0, k-2]\!]$, $f(e_j) = f(f^j(x)) = f^{j+1}(x) = e_{j+1}$ donc $f(e_j) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
De plus, par définition de k, la famille $\big(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\big)$ est libre et la famille $\big(x, f(x), \dots, f^{k}(x)\big)$ est liée donc $f(e_{k-1}) = f^k(x) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
Comme pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, on en déduit par linéarité de f que $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est stable par f.
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un entier } k \text{ compris entre 1 et } n \text{ tel que } \mathscr{F} = \big(x, f(x), \dots, f^k(x)\big) \text{ est libre et } \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \text{ est stable par } f.}$$

Q2 b) On note toujours pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $e_j = f^j(x)$.
Comme la famille $(e_0, \dots, e_{k-1})$ est une famille libre de E, par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_{n-1})$ de E (car $\dim(E) = n$).
Comme $\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_{k-1})$ est stable par f, on sait par le cours que la matrice de f dans cette base est triangulaire par blocs :

$$\boxed{\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix} \text{ avec } A = \mathscr{M}at_{\mathscr{F}}(\widetilde{f}) \text{ où } \widetilde{f} \text{ est l'endomorphisme induit par } f \text{ sur } F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}).}$$

Q2 c) Calculons le polynôme caractéristique de f en calculant celui de la matrice obtenue à la question précédente. Comme la matrice est triangulaire par blocs, on a :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} XI_k - A & -B \\ (0) & XI_{n-k} - C \end{vmatrix} = \det(XI_k - A)\det(XI_{n-k} - C) = \chi_A \cdot \chi_C = \chi_{\widetilde{f}} \cdot \chi_C = \chi_C \cdot \chi_{\widetilde{f}}.$$

Ainsi, $\chi_f(f) = \chi_C(f) \circ \chi_{\widetilde{f}}(f)$ donc $\chi_f(f)(x) = \chi_C(f)\big(\chi_{\widetilde{f}}(f)(x)\big)$.
Comme $x \in F$, on a aussi $\chi_{\widetilde{f}}(f)(x) = \chi_{\widetilde{f}}(\widetilde{f})(x) = 0_E$ en appliquant la question 1 avec $\widetilde{f} \in \mathscr{L}(F)$.
Ainsi, $\chi_f(f)(x) = \chi_C(f)(0_E) = 0_E$.

$$\boxed{\chi_f(f)(x) = 0_E.}$$

Q3 On a montré que pour tout vecteur x non nul, $\chi_f(f)(x) = 0_E$ et ceci est encore vrai pour le vecteur nul car $\chi_f(f) \in \mathscr{L}(E)$.
On en déduit que :

$$\boxed{\chi_f(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

I. Théorème de Cayley-Hamilton - Méthode 2 : par trigonalisation

Q4 Par le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{C}$ donc u est trigonalisable.
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe une base } \mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ de } \mathbb{C}^n \text{ telle que } T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est triangulaire supérieure.}}$$

Q5 Comme A et T représentent un même endomorphisme dans deux bases, elles sont semblables donc $\chi_A = \chi_T$. Comme T est triangulaire, on en déduit que :

$$\boxed{\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).}$$

Q6 Par lecture sur la matrice T, on a $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.
On a donc $P_1(u)(e_1) = (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_1) = u(e_1) - \lambda_1 e_1 = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1)$. Il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $x = \alpha e_1$.
On a donc par linéarité, $P_1(u)(x) = \alpha P_1(u)(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathrm{Vect}(e_1),\ P_1(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q7 a) Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. On a $P_k(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Comme $P_{k+1} = (X - \lambda_{k+1})P_k$, on a $P_{k+1}(u) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}) \circ P_k(u)$ donc :

$$P_{k+1}(u)(x) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})\big(P_k(u)(x)\big) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})\big(0_{\mathbb{C}^n}\big) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k),\ P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q7 b) Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]$, on note $t_{i,j}$ le cœfficient de la matrice T d'indice (i,j).
Comme la matrice T est triangulaire supérieure, si $i > j$ alors on a $t_{i,j} = 0$.
Par lecture sur la matrice, on a donc :

$$u(e_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} t_{i,k+1} e_i = \sum_{i=1}^{k} t_{i,k+1} e_i + \lambda_{k+1} e_{k+1}.$$

On a donc $(u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) = u(e_{k+1}) - \lambda_{k+1}e_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} t_{i,k+1} e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

$$\boxed{(u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k).}$$

Q7 c) D'après la question b), on peut appliquer $\mathscr{P}(k)$ avec $x = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1})$.
On obtient que $P_k(u)\big((u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1})\big) = 0_{\mathbb{C}^n}$ c'est-à-dire $P_k(u) \circ (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Or, $P_k(u) \circ (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}) = \big(P_k(X - \lambda_{k+1})\big)(u) = P_{k+1}(u)$.
D'où :

$$\boxed{P_{k+1}(u)(e_{k+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q7 d) On a donc prouvé que pour tout $j \in [\![1, k+1]\!]$, $P_{k+1}(u)(e_j) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Comme $P_{k+1}(u)$ est linéaire, on en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{P}(k+1)\ :\ \forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}),\ P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q8 On a montré $\mathscr{P}(1)$ à la question 6 et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ implique $\mathscr{P}(k+1)$ d'après la question 7.
Par récurrence (finie), on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k),\ P_k(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, $P_n(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Comme $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{C}^n$ et $P_n = \chi_A$, on en déduit que $\chi_A(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)}$.
Comme $\chi_A(A)$ est la matrice de $\chi_A(u)$ dans la base canonique, on en déduit que :

$$\boxed{\chi_A(A) = 0_n.}$$

II. Lemme de décomposition des noyaux

Q1 Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)$. On a $(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$ donc $u(x) = \lambda_j x$.
On sait par le cours qu'on a alors $P(u)(x) = P(\lambda_j)x$.
Or, λ_j est une racine de P donc $P(\lambda_j) = 0$.

On en déduit que $P(u)(x) = 0_E$ c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$.
On a donc prouvé l'inclusion :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(P(u)).}$$

On en déduit l'inclusion $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$.

Q2 (a) Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$. Comme $Q(u)$ est une application linéaire, on a :

$$Q(u)(x) = Q(u)\left(\sum_{j=1}^{d} x_j\right) = \sum_{j=1}^{d} Q(u)(x_j).$$

Or, pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, on a $x_j \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)$ donc $u(x_j) = \lambda_j x_j$.
On en déduit par le cours que $Q(u)(x_j) = Q(\lambda_j)x_j$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } Q \in \mathbb{K}[X],\ Q(u)(x) = \sum_{j=1}^{d} Q(\lambda_j)x_j.}$$

Q2 (b) Soit $k \in [\![1, d]\!]$. Par la question précédente appliquée avec $Q = L_k$, on obtient :

$$L_k(u)(x) = \sum_{j=1}^{d} L_k(\lambda_j)x_j = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{d} L_k(\lambda_j)x_j + L_k(\lambda_k)x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{d} 0.x_j + 1.x_k = x_k$$

car on sait que pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, $L_k(\lambda_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k. \end{cases}$
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, d]\!],\ x_k = L_k(u)(x).}$$

Q3 (a) Soit $j \in [\![1, d]\!]$. On a :

$$(X - \lambda_j)L_j = (X - \lambda_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{d} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{d} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{d} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} P.$$

En notant $\alpha_j = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{d} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k}$, on a alors $\boxed{(X - \lambda_j)L_j = \alpha_j P}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)(x_j) &= (u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)\big(L_j(u)(x)\big) = [(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \circ L_j(u)](x) \\ &= [(X - \lambda_j)(u) \circ L_j(u)](x) = [(X - \lambda_j)L_j](u)(x) = \alpha_j P(u)(x) = 0_E \end{aligned}$$

car $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } j \in [\![1, d]\!],\ x_j \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E).}$$

Q3 (b) On sait que $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} L_j = 1$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{j=1}^{d} L_j(u) = \mathrm{Id}_E.}$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} L_j(u)(x) = \mathrm{Id}_E(x) = x$ d'où $\boxed{x = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} x_j.}$

Q4 Dans la synthèse, on a montré que pour tout $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$, il existe un d-uplet $(x_1, \ldots, x_d)$ de vecteurs de E vérifiant pour tout $j \in [\![1, d]\!]$, $x_j \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)$ et $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} x_j$.

On a donc établi l'inclusion $\mathrm{Ker}(P(u)) \subset \sum_{j=1}^{d} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)$.

Comme on avait prouvé précédemment que $\sum_{j=1}^{d} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$, on en déduit l'égalité :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \sum_{j=1}^{d} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E).$$

De plus, on a prouvé dans l'analyse l'unicité d'écriture d'un vecteur quelconque de $\mathrm{Ker}(P(u))$ comme somme d'un élément de chaque $\mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)$ pour tout $j \in [\![1, d]\!]$.

Cela prouve que la somme $\sum_{j=1}^{d} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E)$ est directe.

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{j=1}^{d} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E).}$$

Q5 Soit P un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

On peut écrire $P = \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$ où $d \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont d éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

Par le lemme de décomposition des noyaux, on a donc :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{j=1}^{d} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E).$$

Comme P est un polynôme annulateur de u, on sait que $\mathrm{sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$.
On note $J = \{j \in [\![1, d]\!], \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$. Ainsi, pour $j \in [\![1, d]\!]$, $j \in J \Leftrightarrow \lambda_j \in \mathrm{sp}(u)$.
On a alors :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \mathrm{Id}_E) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u).$$

Enfin, comme $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on a $\mathrm{Ker}(P(u)) = E$.
Ainsi :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u).$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } u \text{ est diagonalisable.}}$$