DEVOIR SURVEILLÉ 3 – Sujet niveau 1 27/11/24 Durée 4h

Exercice 1 - Résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

A. - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$.

Q2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Q3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Q4. En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

Q5. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

B. - Unicité de la solution

Q6. Montrer que si $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q7. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

Q8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$.

Q9. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

Q10. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k'$ converge normalement sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Q11. Montrer que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Q12. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Q13. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Exercice 2 - Étude de la fonction Zêta de Riemann et de la fonction Zêta alternée

Partie I : Fonction Zêta

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \text{lorsque cette notation a un sens.}$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

Q14. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.

Q15. Soit $a \in]1,+\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?

Q16. Étudier le sens de variation de ζ.
N.B. : Il n'est pas nécessaire d'étudier la dérivée de ζ pour l'obtenir.

Q17. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q18. Soit $x \in]1,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer qu'on a $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.

Q19. En déduire que pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Q20. Donner la limite et un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

Q21. Dessiner l'allure de la courbe représentative de ζ.

Q22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1,+\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

Q23. Soit $a \in]1,+\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$ converge.

Q24. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1,+\infty[$ sous forme de la somme d'une série.

Partie II : Fonction Zêta alternée

On pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

Q25. Justifier que F est bien définie.

Q26. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q27. Montrer qu'on a $\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.

Q28. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 3 - Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(V).$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.

Dans tout l'exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple $(A,B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n+1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.

Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I - Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q29. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2 \,.$$

Q30. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse.
En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2,\ A = X^2 + 2X \ \text{ et } \ B = X^3 + X^2 - X - 1.$$

Q31. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q32. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.

Q33. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

Partie III - Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$.
Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

Q34. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q35. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV - Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^*$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples.

On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.

On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

On rappelle que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q36. Donner sans démonstration la valeur de $L_k(x_j)$ pour tout $(k, j) \in [\![0, n]\!]^2$.
Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Donner sans démonstration les cœfficients de P dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$.

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

Q37. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

Q38. En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

Q39. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.