

SÉRIES ENTIÈRES

Exercices

1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^n} \quad 2. \sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) z^n \quad 3. \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2^n \right) x^n \quad 4. \sum \frac{n!}{(2n)!} x^n \quad 5. \sum_{n \geq 1} n^{\sqrt{n}} x^n$$

$$6. \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} z^n \quad 7. \sum \frac{z^{2n}}{3^n} \quad 8. \sum \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n} x^n \quad 9. \sum e^{\sqrt{n+1}} x^{3n} \quad 10. \sum \frac{z^{n!}}{n!}$$

$$11. \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n} x^n \quad 12. \sum a^{n^\alpha} z^n \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^* \quad 13. \sum \tan \left(\frac{n\pi}{7} \right) x^n \quad 14. \sum \left(\int_0^1 t^n e^{-t} dt \right) x^n$$

$$15. \sum_{n \geq 1} a_n x^n \text{ où } a_n \text{ est la } n\text{-ème décimale de } \sqrt{2} \quad 16. \sum_{n \geq 1} a_n x^n \text{ où } a_n \text{ est le nombre de diviseurs de } n$$

2 1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .
On note R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2n} z^{2n}$ et R_2 celui de $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$.
Montrer que $R = \min(R_1, R_2)$.

2. *Application 1*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

On considère la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = b_n$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$.

3. *Application 2*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right| = \ell$ où $\ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Déterminer son rayon de convergence.

3 Soit F une fraction rationnelle non nulle c'est-à-dire $F = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls.

Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum F(n) a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

4 On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

5 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer leur somme.

$$1. \sum_{n \geq 0} n^2 x^n \quad 2. \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2} \quad 3. \sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{n!} x^n \quad 4. \sum_{n \geq 0} \operatorname{ch} n x^n \quad 5. \sum_{n \geq 0} n^{(-1)^n} x^n$$

$$6. \sum_{n \geq 3} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)} \quad 7. \sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad 8. \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$9. \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)} \quad 10. \sum_{n \geq 0} \frac{nx^n}{(2n+1)!} \quad 11. \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) x^n \quad 12. \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n\alpha)x^n}{n!} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$13. \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^n \quad (k \in \mathbb{N}) \quad 14. \sum_{n \geq 0} a_n x^n \text{ avec } a_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{i+j=n} a_i a_j$$

6 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.

Indication : On pourra montrer qu'elle est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

7 Développer en série entière les fonctions suivantes.

$$1. x \mapsto \ln\left(\frac{2-x}{3-x^2}\right) \quad 2. x \mapsto \ln(1+x-2x^2) \quad 3. x \mapsto \frac{1}{(x+2)(1+3x)} \quad 4. x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+x}$$

$$5. x \mapsto \sin^2 x \cos x \quad 6. x \mapsto (\cos x)e^x \quad 7. x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x \quad 8. x \mapsto \int_0^x \sin(t^2) dt$$

$$9. x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2} \quad 10. x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad 11. x \mapsto \ln(1+x+x^2) \quad 12. x \mapsto \operatorname{Arctan}(1+x)$$

8 Trouver un problème de Cauchy dont la fonction f est solution et en déduire le développement en série entière de f .

$$1. f : x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad 2. f : x \mapsto (\operatorname{Arcsin} x)^2$$

9 On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$.
2. La fonction f est-elle développable en série entière ?

10 Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Montrer que s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[, |f^{(n)}(x)| a^n \leq bn!$ alors f est développable en série entière.
2. Montrer que si f et toutes ses dérivées sont positives alors f est développable en série entière de rayon de convergence infini.

11 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x})$ si $x \geq 0$ et $f(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

12 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(x) \leq \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$.

13 On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x \cos^2 t} dt$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt \right) x^n$.

2. Établir par ailleurs que pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$.

3. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14 On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t) dt = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

2. Montrer que pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{2n+1}$.

3. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

15 Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ est bien définie et continue sur $] -1, 1]$ et en déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

16 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est minoré par $\frac{1}{2}$ et calculer sa somme.

2. En déduire une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$ et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

2. On note S la somme de cette série entière.

Montrer que S est solution d'une équation différentielle du premier ordre et exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.

18 Pour chaque équation différentielle ci-dessous, chercher les fonctions développables en série entière qui sont solution puis déterminer leur expression explicite.

1. $x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$

2. $y'' - 2xy' - 4y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

3. $(1+x^2)y'' - 2y = 0$

19 Dans un magasin, la barquette de fraises coûte 1 euro, la barquette de framboises coûte 2 euros et la barquette de cerises coûte 3 euros. On dispose de n euros ($n \in \mathbb{N}$).

On souhaite déterminer le nombre de façons de dépenser intégralement ces n euros en barquettes de fruits. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note alors $u_n = \text{Card}\{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3, i + 2j + 3k = n\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}$.

2. En admettant que pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{6(1-x)^3} + \frac{1}{4(1-x)^2} + \frac{17}{72(1-x)} + \frac{1}{8(1+x)} - \frac{j}{9(x-j)} - \frac{\bar{j}}{9(x-\bar{j})}$$

(où $j = e^{2i\pi/3}$), déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *involution de* $\llbracket 1, n \rrbracket$ toute application $s : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $s \circ s = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$.

On note I_n le nombre d'involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On pose $I_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.

2. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge.

On note S la fonction somme.

3. Justifier que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $S'(x) = (1+x)S(x)$.

4. En déduire une expression de $S(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$ puis de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.