CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 3 - Sujet 1

Exercice 1 - Résolution d'une équation fonctionnelle (extrait CCINP PC 2021)

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

A. - Existence de la solution

Q1. Soit $x \in]0,+\infty[$. Montrons que la série $\sum \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ converge.

Méthode 1 :

- On a $\left|\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right| = \frac{1}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2} \geqslant 0$.
- La série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge (car c'est une série de Riemann avec $2 > 1$).

Par comparaison par équivalent, on en déduit que la série $\sum \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ converge absolument donc converge.

Méthode 2 :

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(x+k)^2} \geqslant 0$ donc il s'agit d'une série alternée.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $0 < x+k \leqslant x+k+1$ donc par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ puis décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\frac{1}{(x+k)^2} \geqslant \frac{1}{(x+k+1)^2}$.

On en déduit que la suite $\left(\frac{1}{(x+k)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus, on a $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = 0$.

On en déduit par le critère de Leibniz, que la série $\sum \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$$

Q2. Soit $x \in]0,+\infty[$.

On a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

En posant $\ell = k+1$ dans la première somme puis en sortant le premier terme de la deuxième somme, on obtient :

$$\varphi(x+1)+\varphi(x) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\ell-1}}{(x+\ell)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = -\sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{(-1)^\ell}{(x+\ell)^2} + \left(\frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[,\ \varphi(x+1)+\varphi(x) = \frac{1}{x^2}.}$$

Q3. Soit $x \in]0,+\infty[$.

Comme vu à la question 1. *Méthode 2*, la suite $\left(\frac{1}{(x+k)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

On en déduit par le théorème spécial des séries alternées que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n+1)^2}\right| = \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]0,+\infty[, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}.}$$

Q4. D'après 1, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, on note $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$.

Montrons que la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]0,+\infty[$. D'après la question 3., on a :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2} \leqslant \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{\text{ne dépend pas de } x} \qquad \text{car } x+n+1 \geqslant n+1 > 0.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x)|,\ x \in]0,+\infty[\}$ et $\|R_n\|_\infty^{]0,+\infty[}$ en est le plus petit.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|R_n\|_\infty^{]0,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2} = 0$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^{]0,+\infty[} = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k \text{ converge uniformément sur }]0,+\infty[.}$$

Q5. Avec la question 2, il ne reste plus qu'à vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
Utilisons le théorème de la double limite.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_k(x) = 0 \in \mathbb{R}$.
- D'après la question 4, la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

Par le théorème de la double limite, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est une solution de } (P).}$$

B. - Unicité de la solution

Q6. On suppose que $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P).

Soit $x \in]0,+\infty[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

Initialisation : Cas $n = 0$.

On a $(-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2} = -f(x+1) + \dfrac{1}{x^2} = f(x)$ puisque f vérifie (P).

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

Comme f est solution de (P), on a pour tout $y \in]0,+\infty[$, $f(y) + f(y+1) = \dfrac{1}{y^2}$.

En appliquant ceci avec $y = x+n+1 > 0$, on obtient $f(x+n+1) = \dfrac{1}{(x+n+1)^2} - f(x+n+2)$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que :

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(x+n+1)^2} - f(x+n+2)\right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\ &= (-1)^{n+2} f(x+n+2) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n+1)^2} \\ &= (-1)^{n+2} f(x+n+2) + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion : On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.}$$

Q7. On suppose que $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P).
Soit $x \in]0,+\infty[$. Montrons que $f(x) = \varphi(x)$.
D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ (*).
On a $\lim_{n \to +\infty} (x+n+1) = +\infty$ et $\lim_{y \to +\infty} f(y) = 0$ puisque f est solution de (P), donc par composition, $\lim_{n \to +\infty} f(x+n+1) = 0$.
Comme la suite $\left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} (-1)^{n+1} f(x+n+1) = 0$.
D'autre part, par définition, on a $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \varphi(x)$ (série convergente d'après la question 1.).
En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*), on en déduit que $f(x) = \varphi(x)$.
On a donc prouvé que $f = \varphi$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est l'unique solution du problème } (P).}$$

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Q8. ▸ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction φ_k est continue sur $]0,+\infty[$ (car c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$).
▸ D'après la question 4, la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
Par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

Q9. Par la question 2, on a pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \frac{1}{x^2}$ donc $x^2\varphi(x) = 1 - x^2\varphi(x+1)$.
Par continuité de la fonction φ en 1, on a $\lim_{x \to 0^+} \varphi(x+1) = \varphi(1)$.
Par opérations sur les limites, on en déduit que $\lim_{x \to 0^+} (1 - x^2\varphi(x+1)) = 1$ d'où $\lim_{x \to 0^+} \frac{\varphi(x)}{1/x^2} = 1$.
Ainsi :

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^2}.}$$

Q10. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction φ_k est dérivable sur $]0,+\infty[$ (d'après les théorèmes généraux) et on a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\varphi_k'(x) = (-1)^k \times (-2) \times 1 \times (x+k)^{-3} = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Montrons que la série $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k'$ converge normalement sur $[\varepsilon,+\infty[$.
Soit $k\in\mathbb{N}$. La fonction $|\varphi_k'| : x\mapsto \dfrac{2}{(x+k)^3}$ est décroissante sur $[\varepsilon,+\infty[$ donc elle admet un maximum atteint en ε, qui vaut $\dfrac{2}{(\varepsilon+k)^3}$.
On en déduit que $\|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} = \dfrac{2}{(\varepsilon+k)^3}$.
Or, la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ converge (car $\dfrac{2}{(\varepsilon+k)^3}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{2}{k^3}$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{k^3}\geqslant 0$ et la série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^3}$ converge puisque $3>1$).
On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \textstyle\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k' \text{ converge normalement } [\varepsilon,+\infty[.}$$

Q11. ▸ Pour tout $k\in\mathbb{N}$, la fonction φ_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (d'après les théorèmes généraux).
▸ La série $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
▸ Soit $\varepsilon>0$. Par la question précédente, la série $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k'$ converge normalement donc uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.
Par le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des sommes de séries de fonctions, on en déduit que la fonction $\varphi_{|[\varepsilon,+\infty[}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$ et on peut dériver terme à terme sur $[\varepsilon,+\infty[$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$ et la classe $\mathscr{C}^1$ étant une propriété locale, on en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ donc dérivable sur }]0,+\infty[\\ \text{et on a pour tout } x\in]0,+\infty[,\ \varphi'(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_k'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.\end{array}}$$

Q12. Soit $x\in]0,+\infty[$. On a $\varphi'(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.
Comme la suite $\left(\dfrac{2}{(x+k)^3}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, on en déduit par le critère spécial des séries alternées que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ est du signe de son premier terme c'est-à-dire de $\frac{-2}{x^3}$ qui est négatif.
On a donc $\varphi'(x)\leqslant 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est décroissante sur }]0,+\infty[.}$$

Q13. Soit $x\in]1,+\infty[$.
Par décroissance de la fonction φ sur $]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(x-1)$ et donc :

$$\varphi(x)+\varphi(x+1)\leqslant 2\varphi(x)\leqslant\varphi(x-1)+\varphi(x).$$

Or, par la question 2., on a $\varphi(x)+\varphi(x+1)=\dfrac{1}{x^2}$ et $\varphi(x-1)+\varphi(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (puisque $x-1>0$).
Ainsi :

$$\boxed{\forall x\in]1,+\infty[,\ \ \frac{1}{x^2}\leqslant 2\varphi(x)\leqslant\frac{1}{(x-1)^2}.}$$

Comme $\dfrac{1}{(x-1)^2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$, on en déduit par encadrement que $2\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$.
Ainsi :

$$\boxed{\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x^2}.}$$

Exercice 2 - Fonctions Zêta de Riemann et Zêta alternée *(E3A PC 2017 et Centrale PC 2018)*

Q14. Soit $x \in \mathbb{R}$.

La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 1$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de la fonction } \zeta \text{ est }]1, +\infty[.}$$

Q15. ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ est continue sur $[a, +\infty[$ par les théorèmes généraux.

⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est positive et décroissante sur $[a, +\infty[$ donc $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} = \operatorname*{Sup}\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{n^a}$.

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ converge car $a > 1$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[}$ converge.

Cela signifie que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ donc elle converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Par le théorème de continuité, on en déduit que $\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est continue sur } [a, +\infty[.}$

Ceci étant vrai pour tout intervalle $[a, +\infty[$ inclus dans $]1, +\infty[$ et la continuité étant une propriété locale, on en déduit :

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est continue sur }]1, +\infty[.}$$

Q16. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $1 < x \leqslant y$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $f_n(x) \geqslant f_n(y)$ car la fonction f_n est décroisante sur $]1, +\infty[$ (puisque $-\ln n \leqslant 0$).

Par somme (séries convergentes), on en déduit que $\zeta(x) \geqslant \zeta(y)$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ est décroissante.}}$$

Q17. ⋆ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x \overbrace{\ln n}^{>0}} = 0$.

⋆ On a vu à la question Q2 que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[2, +\infty[$ (avec $a = 2 > 1$).

On en déduit par le théorème de la double limite que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.}$$

Q18. Pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $\frac{1}{t^x} = e^{-x \ln t} \leqslant e^{-x \ln n} = \frac{1}{n^x}$ donc par croissance de l'intégrale ($n \leqslant n+1$), on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x} \mathrm{d}t = \frac{1}{n^x}(n + 1 - n) = \frac{1}{n^x}.$$

De même, pour tout $t \in [n-1, n]$, on a $\frac{1}{t^x} = e^{-x \ln t} \geqslant e^{-x \ln n} = \frac{1}{n^x}$ donc par croissance de l'intégrale ($n - 1 \leqslant n$), on a :

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t \geqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^x} \mathrm{d}t = \frac{1}{n^x}(n - (n-1)) = \frac{1}{n^x}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t \leqslant f_n(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x} \mathrm{d}t.}$$

Q19. Soit $x \in]1,+\infty[$. Soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geqslant 2$.
En sommant les inégalités précédentes pour n allant de 2 à N, on obtient par la relation de Chasles :

$$\int_2^{N+1} t^{-x}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=2}^{N} f_n(x) \leqslant \int_1^{N} t^{-x}\mathrm{d}t.$$

Comme $x \neq 1$, on a :

$$\int_2^{N+1} t^{-x}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-x+1}t^{-x+1}\right]_2^{N+1} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(N+1)^{x-1}} - \frac{1}{2^{x-1}}\right).$$

De même :

$$\int_1^{N} t^{-x}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-x+1}t^{-x+1}\right]_1^{N} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{N^{x-1}} - 1\right).$$

Comme $x > 1$, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans les inégalités ci-dessus, on obtient alors :

$$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \frac{1}{x-1} \quad \text{d'où} \quad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

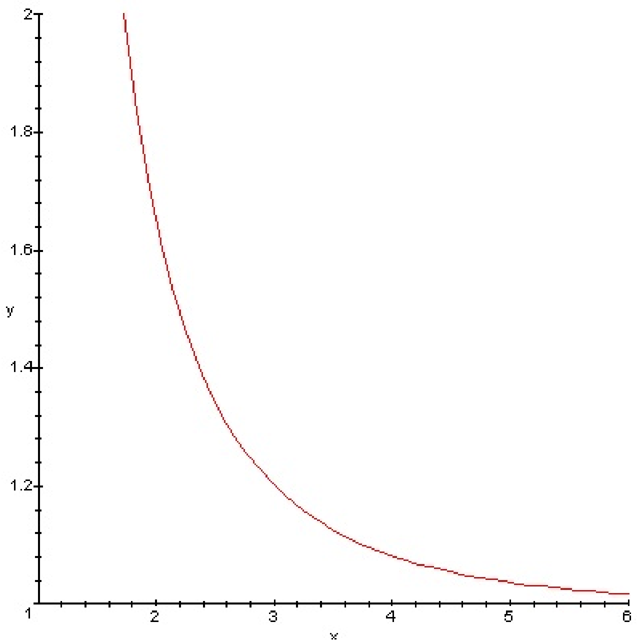
Ainsi :

$$\boxed{1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.}$$

Q20. Pour tout $x > 1$, on a $1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$.
On a $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ donc $1 + \dfrac{1}{x-1} \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} 2^{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} e^{(x-1)\ln 2} = 1$ donc $1 + \dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}} \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1} \text{ et } \lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty.}$$

Q21. Allure de la courbe représentative de la fonction ζ :



Q22. $\boxed{\text{La fonction } f_n : x \mapsto e^{-x\ln n} \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]1,+\infty[}$ par les théorèmes généraux.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln n)^k}{n^x}$.
Initialisation : $k = 1$

On a pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f_n(x) = e^{-x\ln n}$ donc $f_n'(x) = -\ln n e^{-x\ln n} = \dfrac{(-\ln n)^1}{n^x}$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln n)^k}{n^x} = (-\ln n)^k e^{-x\ln n}$.
Ainsi, on a pour tout $x \in]1,+\infty[$, $f_n^{(k+1)}(x) = \left(f_n^{(k)}\right)'(x) = (-\ln n)^k(-\ln n)e^{-x\ln n} = \dfrac{(-\ln n)^{k+1}}{n^x}$.
On a donc montré par récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1,+\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.}$$

Q23. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \gamma < a$ (par exemple $\gamma = \frac{a+1}{2}$).
⋆ On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\gamma \dfrac{(\ln n)^k}{n^a} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^{a-\gamma}} = 0$ car $a-\gamma > 0$ (par croissances comparées). Ainsi, $\dfrac{(\ln n)^k}{n^a} = o\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$
⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^\gamma} \geqslant 0$.
⋆ La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\gamma}$ converge car $\gamma > 1$.
Donc par comparaison :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(\ln n)^k}{n^a} \text{ converge.}}$$

Q24. ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$.
⋆ La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ d'après 1.
⋆ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $1 < a < b$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $|f_n^{(k)}| : x \mapsto \dfrac{(\ln n)^k}{n^x} = (\ln n)^k e^{-x\ln n}$ est décroissante sur $[a,b]$ donc on a $\|f_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]} = \dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$.
La série $\sum \dfrac{(\ln n)^k}{n^a}$ converge d'après Q23 (car $a > 1$).
On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|f_n^{(k)}\|_\infty^{[a,b]}$ converge.
Cela signifie que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$ donc elle converge uniformément sur $[a,b]$.
Par le théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$, on en déduit que $\zeta_{|[a,b]}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et on peut dériver terme à terme sur $[a,b]$.
Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]1,+\infty[$, on en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la fonction } \zeta \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]1,+\infty[\text{ et on a pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } x \in]1,+\infty[: \\ \zeta^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.\end{array}}$$

Q25. Soit $x \in]0,+\infty[$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^x} \geqslant 0$ donc la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ est alternée.
La suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0 donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est bien définie sur }]0,+\infty[.}$$

Q26. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

$\star$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto (-1)^n e^{-x \ln n}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\star$ La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ d'après la question Q25.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

Soit $x \in [a,b]$. Par le critère des séries alternées, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{n^a} \text{ et le réel } \frac{1}{n^a} \text{ ne dépend pas de } x.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^a}$ est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x)|, x \in [a,b]\}$ et $\|R_n\|_\infty^{[a,b]}$ est le plus petit majorant de cet ensemble d'où :

$$0 \leqslant \|R_n\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{1}{n^a}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$, on en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^{[a,b]} = 0$.

La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction nulle.

Par suite, la série des fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Par le théorème de continuité, on en déduit que $F_{|[a,b]}$ est continue sur $[a,b]$.

Ceci étant vrai pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$, on en déduit :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

Q27. Soit $x \in]1,+\infty[$. On a :

$$\zeta(x) + F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^x}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. En séparant les termes d'indices pairs et impairs, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1+(-1)^n}{n^x} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1+(-1)^{2p}}{(2p)^x} + \sum_{p=0}^{N} \underbrace{\frac{1+(-1)^{2p+1}}{(2p+1)^x}}_{=0} = \sum_{p=1}^{N} \frac{2}{(2p)^x} = 2^{1-x} \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^x}.$$

On sait que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1+(-1)^n}{n^x}$ et $\sum\limits_{p\geqslant 1} \dfrac{1}{p^x}$ convergent (car $x > 1$) donc par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$ (par suite extraite pour la première somme), on obtient :

$$\boxed{\zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x).}$$

Q28. On cherche à déterminer la valeur de $F(1)$.

On a d'après la question précédente, on a pour tout $x \in]1,+\infty[$, $F(x) = \zeta(x)(2^{1-x} - 1)$.

On a $2^{1-x} - 1 = e^{(1-x)\ln 2} - 1 \underset{x\to 1^+}{\sim} (1-x)\ln 2$ car $\lim\limits_{x\to 1^+} (1-x)\ln 2 = 0$.

D'après Q20, on a $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

Par produit, on en déduit que $F(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} -\ln 2$ donc $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = -\ln 2$.

Or, la fonction F est continue en 1 d'après Q26 donc $F(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} F(x)$.

On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.}$$

Exercice 3 - Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes (extrait CCINP PC 2022)

Partie I - Généralités sur l'application φ

Q29. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$.
Par définition, $\varphi(P)$ est le reste dans la division euclidienne de AP par B.
C'est donc un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré strictement inférieur au degré de B qui est $n+1$.
Ainsi, $\varphi(P)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n c'est-à-dire $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } P \in \mathbb{C}_n[X], \text{ on a } \varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X].}$$

Q30. On a :

$$A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda AP_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + R_1 + \lambda R_2.$$

De plus, comme R_1 et R_2 sont deux éléments de $\mathbb{C}_n[X]$, $R_1 + \lambda R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ (par stabilité de $\mathbb{C}_n[X]$ par combinaison linéaire).
En posant $Q = Q_1 + \lambda Q_2$ et $R = R_1 + \lambda R_2$, on a donc trouvé un couple (Q, R) d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$A(P_1 + \lambda P_2) = BQ + R \text{ avec } \deg(R) < \deg(B).$$

On en déduit par unicité que :

$$\boxed{\begin{array}{l} Q = Q_1 + \lambda Q_2 \text{ est le quotient et } R = R_1 + \lambda R_2 \text{ le reste dans la division euclidienne} \\ \text{de } A(P_1 + \lambda P_2) \text{ par } B. \end{array}}$$

Par définition, $\varphi(P_1)$ est le reste dans la division euclidienne de AP_1 par B donc $\varphi(P_1) = R_1$,
$\varphi(P_2)$ est le reste dans la division euclidienne de AP_2 par B donc $\varphi(P_2) = R_2$
et $\varphi(P_1 + \lambda P_2)$ est le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B donc par ce qui précède, $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2$.
On a ainsi :

$$\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2).$$

L'application φ est donc une application linéaire de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ (d'après la question 29)) donc :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}_n[X].}$$

Partie II - Étude d'un premier exemple

Q31. Pour établir le résultat souhaité, il suffit de vérifier que :

$$\varphi(1) = 2X + X^2,\ \varphi(X) = 1 + X + X^2 \text{ et } \varphi(X^2) = 1 + 2X.$$

Par définition, $\varphi(1)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = X^2 + 2X$ par $B = X^3 + X^2 - X - 1$.
On a $X^2 + 2X = 0 \times B + X^2 + 2X$ avec $\deg(X^2 + 2X) = 2 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(1) = X^2 + 2X$.
Par définition, $\varphi(X)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = X^3 + 2X^2$ par $B = X^3 + X^2 - X - 1$.
On a $X^3 + 2X^2 = 1 \times B + X^2 + X + 1$ avec $\deg(X^2 + X + 1) = 2 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(X) = X^2 + X + 1$.
Par définition, $\varphi(X^2)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = X^4 + 2X^3$ par $B = X^3 + X^2 - X - 1$.
On a $X^4 + 2X^3 = (X + 1) \times B + 2X + 1$ avec $\deg(2X + 1) = 1 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(X^2) = 2X + 1$.
En écrivant en colonne les coordonnées de $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$ dans la base canonique, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ a pour matrice } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base canonique.}}$$

Q32. Calculons le polynôme caractéristique de M.
On a par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ puis développement par rapport à la première colonne :

$$\chi_M = \det(XI_3 - M) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -2 & X-1 & -2 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+1 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & -2 \\ -1-X & -1 & X \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & -2 \\ 0 & -2 & X-1 \end{vmatrix}$$

d'où $\chi_M = (X+1)((X-1)^2 - 2^2) = (X+1)(X-3)(X+1) = (X+1)^2(X-3)$.
On en déduit que $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 3\}$. Déterminons $E_{-1}(M)$ et $E_3(M)$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$(M + I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ x = -y-z \right.$$

On en déduit que $E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{C}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
Comme 3 est un valeur propre simple, on sait que $\dim(E_3(M)) = 1$. Il suffit donc de trouver un vecteur non nul de $E_3(M)$ pour obtenir une base.
On a $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et on constate que $(M - 3I_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0_{3,1}$.
On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_3(M)$.
Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 3\},\ E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } E_3(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

Q33. Précisons que la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_{-1}(M)$ car elle est génératrice de $E_{-1}(M)$ et libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.
Comme M est la matrice de φ dans la base canonique, on en déduit par les relations vectoriel/matriciel que $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-1, 3\}$, $(-1+X, -1+X^2)$ est une base de $E_{-1}(\varphi)$ et $(1+2X+X^2)$ est une base de $E_3(\varphi)$.
Comme $\dim(E_{-1}(\varphi)) + \dim(E_3(\varphi)) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{C}_2[X])$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable.}}$$

On a donc $\mathbb{C}_2[X] = E_{-1}(\varphi) \oplus E_3(\varphi)$. Ainsi, en concaténant les bases de $E_{-1}(\varphi)$ et $E_3(\varphi)$ obtenues, on obtient que :

$$\boxed{(-1+X, -1+X^2, 1+2X+X^2) \text{ est une base de } \mathbb{C}_2[X] \text{ formée de vecteurs propres de } \varphi.}$$

Q34. Par définition, $\varphi(1)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ par $B = X^3$.
On a $\alpha + \beta X + \gamma X^2 = 0 \times B + \alpha + \beta X + \gamma X^2$ avec $\deg(\alpha + \beta X + \gamma X^2) \leqslant 2 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.
Par définition, $\varphi(X)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3$ par $B = X^3$.
On a $\alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = \gamma \times B + \alpha X + \beta X^2$ avec $\deg(\alpha X + \beta X^2) \leqslant 2 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$.
Par définition, $\varphi(X^2)$ est le reste de la division euclidienne de $AP = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4$ par $B = X^3$.

On a $\alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = (\beta + \gamma X) \times B + \alpha X^2$ avec $\deg(\alpha X^2) \leqslant 2 < 3 = \deg(B)$ donc $\varphi(X^2) = \alpha X^2$.
En écrivant en colonne les coordonnées de $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi(X^2)$ dans la base canonique, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ a pour matrice } T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ dans la base canonique.}}$$

Q35. Si le polynôme A est constant alors $\beta = \gamma = 0$ donc $T = \alpha I_3$. La matrice de φ dans la base canonique étant diagonale, on en déduit que l'endomorphisme φ est diagonalisable.
Si l'endomorphisme φ est diagonalisable alors la matrice T est aussi diagonalisable. Ainsi, il existe $P \in \mathscr{G}L_3(\mathbb{C})$ et $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ diagonale telles que $T = PDP^{-1}$. Comme T et D sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique donc $\chi_D = \chi_T = (X - \alpha)^3$ (matrice triangulaire). On en déduit que nécessairement, $D = 3I_3$ et donc $T = P(\alpha I_3)P^{-1} = \alpha I_3$. Ainsi, $\beta = \gamma = 0$ et le polynôme A est donc constant.
On a donc démontré l'équivalence :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable si et seulement si le polynôme } A \text{ est constant.}}$$

Q36. On a d'après le cours :

$$\boxed{\forall (k, j) \in [\![0, n]\!],\ L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}}$$

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ P = \sum_{j=0}^{n} P(x_j) L_j \text{ donc les coordonnées de } P \text{ dans la base } (L_0, \dots, L_n) \text{ sont } P(x_0), \dots, P(x_n).}$$

Q37. Par définition de Q_k et R_k, on a $AL_k = BQ_k + R_k$.
En évaluant en x_j, on a donc $A(x_j)L_k(x_j) = B(x_j)Q_k(x_j) + R_k(x_j)$.
Comme x_j est une racine de B, on a $B(x_j) = 0$ et $L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$
Ainsi, si $j \neq k$ alors l'égalité devient $0 = 0 + R_k(x_j)$ et si $j = k$ alors elle devient $A(x_k) = 0 + R_k(x_k)$.
D'où :

$$\boxed{R_k(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k \text{ et } R_k(x_k) = A(x_k).}$$

Q38. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Par définition, on a $\varphi(L_k) = R_k$.
Or, comme $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$, on a d'après la question 36 :

$$R_k = \sum_{j=0}^{n} R_k(x_j) L_j = \underbrace{R_k(x_k)}_{=A(x_k)} L_k + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \underbrace{R_k(x_j)}_{=0} L_j = A(x_k) L_k.$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi(L_k) = A(x_k) L_k.}$$

Q39. On a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$ et L_k n'est pas le polynôme nul donc L_k est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre $A(x_k)$.
On en déduit que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ donc

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les complexes } A(x_k) \text{ pour } k \in [\![0, n]\!].}$$