DEVOIR SURVEILLÉ 3 – Sujet niveau 2 27/11/24 Durée 4h

Problème 1 : Dérivation des sommes de séries de fonctions

Objectifs

Ce problème étudie la dérivation des sommes de séries de fonctions $\sum f_n$. Pour conclure à une formule du type $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(K)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(K)}$ avec K entier supérieur ou égal à 2 , les théorèmes usuels contiennent généralement au moins une hypothèse sur les dérivées intermédiaires $f_n', \ldots, f_n^{(K-1)}$ (par exemple de convergence simple sur tout l'intervalle). On montre ici que l'on peut affaiblir l'hypothèse de contrôle des dérivées intermédiaires par une hypothèse de convergence de séries numériques de la forme $\sum f_n(x)$ où x parcourt un ensemble fini.

Le problème est divisé en deux parties :

- la partie I étudie une inégalité, qualifiée d'inégalité d'interpolation, qui permet de contrôler les dérivées intermédiaires d'une fonction de classe $\mathcal{C}^K$;
- la partie II utilise la partie I pour démontrer un résultat de transfert du caractère $\mathcal{C}^K$ à une somme de série de fonctions.

Notations

- Pour tous entiers i et j vérifiant $i \leqslant j$, la notation $[\![i, j]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers $[i, j] \cap \mathbb{N}$.
- La lettre K désigne systématiquement un entier naturel non nul.
- Le symbole $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $K-1$ à coefficients réels.
- Pour tout intervalle I, on note $\mathcal{C}^K(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^K$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^K(I)$ et $k \in [\![0, K]\!]$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k (et donc $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$).
- Dans le cas particulier $I = [0,1]$, pour toute fonction bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

I. Inégalités d'interpolation des dérivées

Soit K réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0,1]$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ (dépendant des réels $x_1, \ldots, x_K$) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant K-1} \left\| f^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f^{(K)} \right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)|. \qquad (I.1)$$

Une inégalité du type précédent est appelée *inégalité d'interpolation* à l'ordre K.

I.A - Cas particulier $K = 1$

On fixe $x_1 \in [0,1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1,

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]), \quad \|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + C |f(x_1)|. \qquad (I.2)$$

Q1. Montrer l'inégalité d'interpolation (I.2) avec $C = 1$.

I.B - Cas particulier $K = 2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0,1]$. On veut construire une constante $C > 0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2,

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([0,1]), \quad \max\left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right) \leqslant \|f''\|_\infty + C\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right). \tag{$I.3$}$$

Q2. Pour tous $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, démontrer l'inégalité

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant \|f''\|_\infty .$$

Q3. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a $\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \dfrac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$.

Q4. Conclure le cas $K = 2$ en montrant l'inégalité d'interpolation (I.3) avec $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.

I.C - Cas général par interpolation de Lagrange

On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre K, donnée par (I.1). On fixe $K \in \mathbb{N}^\star$.

Q5. Démontrer que l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{K-1}[X] & \to & \mathbb{R}^K \\ P & \mapsto & \left(P(x_1), \ldots, P(x_K)\right) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Q6. Montrer qu'il existe K polynômes $L_1, \ldots, L_K$ de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$, le polynôme $P = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j) L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in [\![1, K]\!], \quad P(x_\ell) = f(x_\ell).$$

Dans les deux questions suivantes Q7 et Q8, on fixe $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et on note P le polynôme déterminé dans la question Q6.

Q7. Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $K - k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.

Q8. En déduire l'inégalité $\|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty \leqslant \|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

Q9. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée.

II. Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour les séries de fonctions

II.A - Énoncé général

On se propose maintenant de démontrer le résultat annoncé dans le préambule. Soit $K \in \mathbb{N}^\star$, on considère

- des réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ d'un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$);
- une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses
  - (H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a,b]$;
  - (H2) pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ la série numérique $\sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Q10. Dans le cas particulier $[a, b] = [0, 1]$, justifier que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, b]$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

Q11. Traiter la question précédente dans le cas général d'un segment $[a, b]$ avec $a < b$.

On pourra examiner $f_n \circ \sigma$ où $\sigma : [0, 1] \to [a, b]$ est définie par $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ pour tout $t \in [0, 1]$.

D'après le résultat de la question précédente, on peut poser $F_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Q12. Démontrer que F_0 est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a, b]$ et que $F_0^{(k)} = F_k$ pour tout $k \in [\![1, K]\!]$.

II.B - Application sur un exemple

Dans cette sous-partie, on considère un exemple où les dérivées intermédiaires ne s'expriment pas avec les fonctions usuelles.

Q13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, justifier qu'il existe une unique fonction $f_n \in \mathcal{C}^2(\,]0, +\infty[\,)$ vérifiant

$$f_n(1) = 0,\ f_n(2) = 0 \text{ et } f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2} \text{ pour tout } x > 0.$$

Q14. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Q15. Expliciter $F''(x)$.

Q16. Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$ pour tout $x \in [1, 2]$.

Problème 2 : Matrices quasi-nilpotentes

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $M_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $M_n(\mathbb{K})$ celui des matrices carrées à n lignes et à cœfficients dans $\mathbb{K}$. Pour i et j dans $[\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $M_n(\mathbb{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position (i, j) et de valeur 1. La transposée d'une matrice M sera notée M^T.

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite **triangulaire supérieure stricte** lorsqu'elle est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous nuls.

On note $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$ les sous-ensembles de $M_n(\mathbb{K})$ constitués, respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes.

On rappelle la notation du symbole de Kronecker : pour x et y deux entiers,

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1 *Étant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $M_n(\mathbb{K})$, et un élément j de $[\![1, n]\!]$, on note $C_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j-ème.*

Pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$, on note $K(M) \in M_{n-1}(\mathbb{K})$, $R(M) \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $L(M) \in M_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $a(M) \in \mathbb{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array}\right]. \tag{1}$$

On a en particulier défini des fonctions $K : M_n(\mathbb{K}) \to M_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L : M_n(\mathbb{K}) \to M_{1,n-1}(\mathbb{K})$, évidemment linéaires.

Objectifs

Définition 2 *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est* **quasi-nilpotente** *lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbb{K}$. Une partie V de $M_n(\mathbb{K})$ est dite* **quasi-nilpotente** *lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.*

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $M_n(\mathbb{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énonce comme suit :

Théorème (Dimension des espaces quasi-nilpotents) *Pour tout sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $M_n(\mathbb{K})$, on a*

$$\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}. \tag{QN}$$

La clé pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie C.

Lemme (Lemme des colonnes) *Pour tout sous-espace vectoriel V de $M_n(\mathbb{K})$, quasi-nilpotent, il existe un élément j de $[\![1,n]\!]$ tel que $C_j(V) = \{0\}$.*

A. Exemples

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Q17. Montrer que la matrice $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{R})$. Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{C})$?

Q18. Montrer que la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $M_2(\mathbb{C})$.

Q19. Montrer que $S_n(\mathbb{K})$, $A_n(\mathbb{K})$ et $T_n^{++}(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que la dimension de $S_n(\mathbb{K})$ est $n(n+1)/2$.

Q20. Montrer que $T_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{K})$. Vérifier que

$$\dim(T_n^{++}(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Q21. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = 0$. En déduire que $A_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{R})$.

Q22. Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A_n(\mathbb{R}) = \{PMP^{-1} \,|\, M \in T_n^{++}(\mathbb{R})\}.$$

Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice D introduite à la question 17.

B. Cas réel

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

Q23. Déterminer l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $M_n(\mathbb{R})$. Le résultat obtenu tient-il si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

Q24. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que

$$\dim(V) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

C. Lemme des colonnes

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n.

Q25. Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $M_n(\mathbb{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $C_j(V) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit

$$M = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ K(M) & \vdots \\ & 0 \\ \hline L(M) & 0 \end{array}\right]$$

Q26. Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_{n-1}(\mathbb{K})$.

Q27. En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $E_{n,j} \in V$.

Soit σ une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}.$$

On considère la matrice P_σ de $M_n(\mathbb{K})$:

$$P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Q28. Vérifier que u_σ est bijective et préciser $(u_\sigma)^{-1}$.

Q29. Vérifier que P_σ est la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Montrer que P_σ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

Q30. Pour $M \in M_n(\mathbb{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ.
On pourra utiliser un changement de base.

Q31. Montrer que l'ensemble

$$V^\sigma = \{P_\sigma^{-1} M P_\sigma \mid M \in V\}$$

est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_n(\mathbb{K})$ et que $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

Q32. En déduire que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on peut choisir un $f(j) \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$ tel que $E_{j,f(j)} \in V$.
On obtient ainsi une fonction

$$f \ : \ [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!].$$

Q33. En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1, \ldots, j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], \ f(j_k) = j_{k+1} \quad \text{et} \quad f(j_p) = j_1.$$

Q34. Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \sum_{k=1}^{p} E_{j_k, f(j_k)}$ et conclure.

Sujet tronqué : la suite du sujet démontrait le théorème Dimension des espaces quasi-nilpotents dans le cas général.