CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 3 - Sujet 2

PROBLÈME 1 - DÉRIVATION DES SOMMES DE SÉRIES DE FONCTIONS (extrait Centrale 2 MP 2022)

I. INÉGALITÉS D'INTERPOLATION DES DÉRIVÉES

I.A - Cas particulier $K = 1$

Notons que toute fonction continue sur un segment est bornée d'après le théorème des bornes atteintes donc sa norme infinie existe.

Q1. $\boxed{\text{Soit } f \in \mathcal{C}^1([0,1]).}$ Soit $x \in [0,1]$.
Selon l'inégalité des accroissements finis appliquée à f dérivable sur l'intervalle $[0,1]$ à dérivée bornée, on a :

$$|f(x) - f(x_1)| \leqslant \|f'\|_\infty \cdot |x - x_1| \leqslant \|f'\|_\infty$$

car $x \in [0,1]$ et $x_1 \in [0,1]$ donc $|x - x_1| \leqslant 1$.
Par inégalité triangulaire, on a alors :

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(x_1)| + |f(x_1)| \leqslant \|f'\|_\infty + |f(x_1)|.$$

On en déduit que $\|f'\|_\infty + |f(x_1)|$ est un majorant de $\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}$ et $\|f\|_\infty$ est le plus petit majorant de cet ensemble d'où :

$$\boxed{\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)|.}$$

Ceci montre $\boxed{\text{l'inégalité d'interpolation (I.2) avec } C = 1}$

I.B - Cas particulier $K = 2$

Q2. $\boxed{\text{Soit } x \in [0,1] \text{ et } f \in \mathcal{C}^2([0,1]).}$
Par l'égalité des accroissements finis appliquée à f dérivable sur $]x_1, x_2[$ et continue sur $[x_1, x_2]$, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Puis par l'inégalité des accroissements finis appliquée à f' dérivable sur $[0,1]$ à dérivée bornée, on obtient :

$$\left|f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| = |f'(x) - f'(c)| \leqslant \|f''\|_\infty \cdot |x - c|.$$

Comme $x \in [0,1]$ et $c \in [0,1]$, on obtient :

$$\boxed{\left|f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leqslant \|f''\|_\infty.}$$

Q3. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$.
Avec l'inégalité triangulaire, on déduit de la question précédente :

$$\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \left|f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| + \left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leqslant \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_2)| + |f(x_1)|}{x_2 - x_1}$$

car $x_2 - x_1 > 0$.
Comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on obtient :

$$\boxed{\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}.}$$

Q4. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$. Posons $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.

On a $\dfrac{1}{x_2 - x_1} \leqslant C$ et $|f(x_1)| + |f(x_2)| \geqslant 0$ donc par la question Q3, on obtient :

$$\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + C\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right).$$

On a de plus selon Q1 et Q3 :

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)| \leqslant \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1} + 1 \cdot |f(x_1)| = \|f''\|_\infty + C|f(x_1)| + \frac{1}{x_2 - x_1}|f(x_2)|.$$

Comme $\dfrac{1}{x_2 - x_1} \leqslant C$ et $|f(x_2)| \geqslant 0$, on a alors $\|f\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + C|f(x_1)| + C|f(x_2)|$.

Ainsi :

$$\boxed{\max\left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right) \leqslant \|f''\|_\infty + C\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right).}$$

Dans le cas $K = 2$, on a bien montré $\boxed{\text{l'inégalité d'interpolation (I.3) avec } C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}}$.

I.C - Cas général par interpolation de Lagrange

Q5. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_{K-1}[X])^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\Psi(\lambda P + Q) &= \big((\lambda P + Q)(x_1), \ldots, (\lambda P + Q)(x_K)\big) \\
&= \big(\lambda P(x_1) + Q(x_1), \ldots, \lambda P(x_K) + Q(x_K)\big) \\
&= \lambda\big(P(x_1), \ldots, \lambda P(x_K)\big) + \big(Q(x_1), \ldots, \lambda Q(x_K)\big) \\
&= \lambda\Psi(P) + \Psi(Q).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Psi \in (\mathbb{R}_{K-1}[X], \mathbb{R}^K)$.
Montrons que Ψ est injective.
Soit $P \in \ker(\Psi)$. On a $\Psi(P) = 0$ donc $P(x_1) = \cdots = P(x_K) = 0$.
Ainsi, P admet au moins K racines distinctes et $\deg(P) \leqslant K - 1$.
On en déduit que P est le polynôme nul.
On a donc $\ker(\Psi) = \{0\}$ d'où Ψ est injective.
Comme $\dim(\mathbb{R}_{K-1}[X]) = K = \dim(\mathbb{R}^K)$ (dimension finie), on conclut que :

$$\boxed{\text{l'application } \Psi \text{ est un isomorphisme.}}$$

Q6. Notons $(e_1, \ldots, e_K)$ la base canonique de $\mathbb{R}^K$.
Pour $i \in [\![1, K]\!]$, on pose $L_i = \Psi^{-1}(e_i)$ de sorte que $L_i \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$ et $\forall j \in [\![1, K]\!],\ L_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
NB : Les polynômes $L_1, \ldots, L_K$ ainsi définis sont les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $x_1, \ldots, x_K$.

Soit alors $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et $P = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j) L_k$.

On a pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$, $P(x_\ell) = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j) L_k(x_\ell) = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j)\delta_{k,\ell} = f(x_\ell)$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe } K \text{ polynômes } L_1, \ldots, L_K \text{ de } \mathbb{R}_{K-1}[X] \text{ tels que, pour toute fonction } f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \\ \text{le polynôme } P = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j) L_j \text{ vérifie } \forall \ell \in [\![1, K]\!], \quad P(x_\ell) = f(x_\ell).\end{array}}$$

Q7. On procède par récurrence bornée.
L'initialisation est obtenue par Q6, qui nous donne K réels $x_1 < \cdots < x_K$ de $[0,1]$ en lesquels $f^{(0)} - P^{(0)} = f - P$ s'annule.
Pour l'hérédité : Soit $k \in [\![0, K-2]\!]$ tel qu'il existe au moins $K-k$ réels distincts que l'on note $y_1 < \cdots < y_{K-k}$ de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.
Soit $j \in [\![1, K-k-1]\!]$. La fonction $g = f^{(k)} - P^{(k)}$ est dérivable sur $[y_j, y_{j+1}]$ (car f est K fois dérivable sur $[0,1]$) et $g(y_j) = g(y_{j+1}) = 0$.
Par le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $z_j \in]y_j, y_{j+1}[$ tel que :

$$g'(z_j) = \left(f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right)(z_j) = 0.$$

Comme $0 \leqslant y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \cdots < y_{K-k-1} < z_{K-k-1} < y_{K-k} \leqslant 1$, on a obtenu $K-k-1 = K-(k+1)$ points d'annulation dans $[0,1]$ de $f^{(k+1)} - P^{(k+1)}$.
On peut conclure la récurrence :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, K-1]\!], \text{ il existe au moins } K-k \text{ réels distincts de } [0,1] \text{ en lesquels la fonction } f^{(k)} - P^{(k)} \text{ s'annule.}}$$

Q8. $\boxed{\text{Soit } k \in [\![0, K-1]\!].}$
Comme $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$, $f^{(k)} - P^{(k)} \in \mathcal{C}^1([0,1])$ donc on peut lui appliquer Q1 avec x_1' un élément de $[0,1]$:

$$\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|\left(f^{(k)} - P^{(k)}\right)'\right\|_\infty + \left|\left(f^{(k)} - P^{(k)}\right)(x_1')\right|.$$

Or, par la question Q7, on sait qu'il existe au moins un réel de $[0,1]$ en lequel $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule (car $K - k \geqslant 1$) donc on choisit x_1' tel que $\left(f^{(k)} - P^{(k)}\right)(x_1') = 0$.
On en déduit l'inégalité :

$$\boxed{\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty.}$$

Q9. D'après la question Q8, la suite $\left(\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty\right)_{0 \leqslant k \leqslant K}$ est croissante donc pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$:

$$\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)} - P^{(K)}\right\|_\infty.$$

Comme $\deg(P) \leqslant K-1$, on a $P^{(K)} = 0$ d'où pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$:

$$\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty$$

puis par inégalité triangulaire (toutes les fonctions considérées sont bien bornées car continues sur le segment $[0,1]$), on obtient :

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + \left\|P^{(k)}\right\|_\infty.$$

Ainsi :

$$\forall k \in [\![0, K-1]\!],\ \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + \sum_{i=0}^{K-1} \left\|P^{(i)}\right\|_\infty.$$

En utilisant Q6, on a de plus pour tout $i \in [\![0, K-1]\!]$:

$$\left\|P^{(i)}\right\|_\infty = \left\|\sum_{\ell=1}^{K} f(x_\ell) L_\ell^{(i)}\right\|_\infty \leqslant \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)| \left\|L_\ell^{(i)}\right\|_\infty \leqslant \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant K} \left\|L_j^{(i)}\right\|_\infty\right) \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)|.$$

En posant $C = \displaystyle\sum_{i=0}^{K-1} \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant K} \left\|L_j^{(i)}\right\|_\infty\right)$ qui ne dépend que de $x_1, \ldots, x_K$, on a donc :

$$\forall k \in [\![0, K-1]\!],\ \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)|.$$

On a donc trouvé une constante $C > 0$ (car par exemple, $\|L_1\|_\infty > 0$ car L_1 n'est pas le polynôme nul) pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée :

$$\boxed{\forall f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant K-1} \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)|.}$$

II. Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour les séries de fonctions

II.A - Énoncé général

Q10. $\boxed{\text{Soit } k \in [\![0, K-1]\!].}$
Par la question Q9, il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f_n^{(K)} \right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f_n(x_\ell)|.$$

Les séries $\sum \left\| f_n^{(K)} \right\|_\infty$ et $\sum |f_n(x_\ell)|$ pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ sont convergentes selon (H1) et (H2) donc par linéarité, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\left\| f_n^{(K)} \right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f_n(x_\ell)| \right)$ converge.
Par comparaison par inégalité de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left\| f_n^{(k)} \right\|_\infty$ converge.
Cela signifie que :

$$\boxed{\text{la série } \sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [0,1].}$$

Q11. Comme proposé dans l'énoncé, on pose $\sigma : [0,1] \to [a,b]$ où $\sigma(t) = (1-t)a + tb = (b-a)t + a$ pour tout $t \in [0,1]$.
La fonction σ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$ et elle vérifie $\sigma(0) = a$ et $\sigma(1) = b$. Ainsi, σ est bijective de $[0,1]$ sur $[a,b]$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = f_n \circ \sigma$ et pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$, $y_\ell = \sigma^{-1}(x_\ell)$.
Comme σ est affine, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est de classe $\mathcal{C}^K([0,1])$ de dérivées :

$$\forall k \in [\![0, K]\!], \ g_n^{(k)} = (b-a)^k f_n^{(k)} \circ \sigma.$$

Pour tout $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction bornée, on note $\|h\|_{\infty,[a,b]} = \displaystyle\sup_{t\in[a,b]} |h(t)|$.
Comme σ est bijective, on remarque que $\{|h(t)|, \ t \in [a,b]\} = \{|h(\sigma(x))|, \ x \in [0,1]\}$.
Ainsi, $\|h\|_{\infty,[a,b]} = \|h \circ \sigma\|_{\infty,[0,1]} = \|h \circ \sigma\|_\infty$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in [\![0, K]\!]$:

$$\|g_n^{(k)}\|_\infty = \|(b-a)^k f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} = (b-a)^k \|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$$

donc

$$\|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} = \frac{1}{(b-a)^k} \|g_n^{(k)}\|_\infty \qquad (\star).$$

On vérifie maintenant les hypothèses pour utiliser Q10 :
— $y_1 < \cdots < y_K$ sont des réels distincts de l'intervalle $[0,1]$ car σ^{-1} est également strictement croissante,
— (g_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[0,1]$ vérifiant les deux hypothèses :
 (H1) la série de fonctions $\sum g_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a,b]$ (car $\sum \|f_n^{(K)}\|_{\infty,[a,b]}$ converge donc $\sum \|g_n^{(K)}\|_\infty$ aussi par $(\star)$),
 (H2) pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$, la série numérique $\sum g_n(y_\ell) = \sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Ainsi par Q10, on en déduit que pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, la série $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement sur $[0,1]$ donc la série $\sum \|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$ également par $(\star)$.
On a donc prouvé que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, K-1]\!], \text{ la série } \sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [a,b].}$$

Q12. (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$.

(ii) Soit $k \in [\![1, K-1]\!]$. La série de fonction $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement donc simplement sur $[a,b]$ selon Q11 de somme F_k.

(ii) La série de fonction $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$ de somme F_K.

Avec (i), (ii) et (iii), par le théorème de cours sur la classe $\mathcal{C}^K$ des sommes de séries de fonctions, on obtient :

$$\boxed{F_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^K \text{ sur } [a,b] \text{ et } F_0^{(k)} = F_k \text{ pour tout } k \in [\![1,K]\!].}$$

II.B - Application sur un exemple

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons g la fonction $x \mapsto (-1)^n 2^{-nx^2} = (-1)^n e^{-nx^2 \ln 2}$.
La fonction g est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ donc elle admet une primitive G sur $]0,+\infty[$, qui est dérivable donc continue sur $]0,+\infty[$ donc G admet une primitive H sur $]0,+\infty[$.
Ainsi, H est une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $H'' = g$ qui est continue sur $]0,+\infty[$ donc $H \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$.
Unicité : On suppose que f_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$ vérifiant $f_n(1) = f_n(2) = 0$ et pour tout $x > 0$, $f_n''(x) = g(x)$.
Alors en intégrant, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = G(x) + a$ puis il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $f_n(x) = H(x) + ax + b$.
Comme $f_n(1) = f_n(2) = 0$, on a $H(1) + a + b = 0$ et $H(2) + 2a + b = 0$ donc $a = H(1) - H(2)$ et $b = H(2) - 2H(1)$.
Ainsi, pour tout $x > 0$, $f_n(x) = H(x) + (H(1) - H(2))x + H(2) - 2H(1)$. D'où l'unicité.
Existence : Posons pour tout $x > 0$, $f_n(x) = H(x) + (H(1) - H(2))x + H(2) - 2H(1)$.
Alors $f_n \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$, $f_n(1) = H(1) + H(1) - H(2) + H(2) - 2H(1) = 0$,
$f_n(2) = H(2)+2(H(1)-H(2))+H(2)-2H(1) = 0$ et pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = H'(x) + H(1) - H(2)$ puis $f_n''(x) = H''(x) = g(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$. D'où l'existence.
Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe une unique fonction } f_n \in \mathcal{C}^2(\,]0,+\infty[\,) \text{ vérifiant} \\ f_n(1) = 0,\ f_n(2) = 0 \text{ et } f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2} \text{ pour tout } x > 0.\end{array}}$$

Q14. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $]0,+\infty[$ avec $\alpha < \beta$.
On pose $a = \min(\alpha, 1)$ et $b = \max(\beta, 2)$.
On veut appliquer II.A sur le segment $[a,b]$ avec $K = 2$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.
— On a bien deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[a,b]$.
— $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ vérifiant les deux hypothèses :

(H1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(2)}$ converge normalement sur $[a,b]$.
En effet, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|f_n''\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} e^{-nx^2 \ln 2} = e^{-na^2 \ln 2} = 2^{-na^2}$$

car la fonction $x \mapsto e^{-nx^2 \ln 2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Or, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2^{-na^2}$ converge car c'est une série géométrique de raison $2^{-a^2} = e^{-a^2 \ln 2} \in [0,1[$ $(a > 0)$.

(H2) Pour tout $\ell \in \{1,2\}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x_\ell)$ converge absolument car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x_\ell) = 0$.

Ainsi, par Q10 ($k = 0$), on obtient que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$ et par *Q*12, sa somme F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et pour tout $x \in [a,b]$, $F''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n''(x)$. $(k = 2)$.
Comme tout ceci est valable sur $[a,b]$ et $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$, c'est valable sur $[\alpha, \beta]$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge normalement sur tout segment inclus dans }]0,+\infty[\\ \text{et } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ avec } \forall x \in]0,+\infty[,\ F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n''(x)\end{array}}$$

car ces propriétés sont vraies au voisinage de tout point de $]0,+\infty[$ (propriétés locales).

Q15. On a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$F''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-2^{-x^2})^n = \frac{(-1)^1 2^{-x^2}}{1+2^{-x^2}} = -\frac{1}{1+2^{x^2}}$$

car il s'agit d'une somme géométrique avec $|-2^{-x^2}| < 1$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ F''(x) = -\frac{1}{1+2^{x^2}}.}$$

Q16. On définit $G : t \mapsto F(t+1)$ sur $[0,1]$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ car F l'est sur $[1,2]$.
D'après Q9 (ou Q4), comme $0 < 1$ alors il existe $C > 0$ indépendant de G tel que

$$\|G\|_\infty \leqslant \|G''\|_\infty + C\left(|G(0)| + |G(1)|\right).$$

Or, on a $G(0) = F(1) = \sum_{n=1} f_n(1) = 0$ et de même $G(1) = F(2) = 0$ d'où $\|G\|_\infty \leqslant \|G''\|_\infty$.
Par ailleurs, on a ;

$$\forall t \in [0,1],\ G''(t) = F''(t+1) = -\frac{1}{1+2^{(t+1)^2}}$$

d'où $\forall t \in [0,1],\ |G''(t)| = \dfrac{1}{1+2^{(t+1)^2}} \leqslant \dfrac{1}{1+2^{(0+1)^2}} = \dfrac{1}{3}$.
Ainsi :

$$\forall t \in [0,1],\ |G(t)| \leqslant \|G\|_\infty \leqslant \|G''\|_\infty \leqslant \frac{1}{3}$$

On en déduit :

$$\boxed{\forall x \in [1,2],\ |F(x)| = |G(x-1)| \leqslant \frac{1}{3}.}$$

Problème 2 - Matrices quasi-nilpotentes (extrait Mines PSI 2016)

A. Exemples

Q17. Le polynôme caractéristique de D est $\chi_D = X^2 + 1$.
Il n'a aucune racine réelle et le spectre réel de D est donc vide.
En particulier, D n'a aucune valeur propre réelle non nulle.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice } D \text{ est quasi-nilpotente vue comme matrice de } M_2(\mathbb{R}).}$$

Le spectre complexe de D est $\{i,-i\}$ et contient au moins un élément non nul (par exemple i).
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice } D \text{ n'est pas quasi-nilpotente vue comme matrice de } M_2(\mathbb{C}).}$$

Q18. Le polynôme caractéristique de B est

$$\chi_B = X^2 - \underbrace{\mathrm{tr}(B)}_{=0}X + \underbrace{\det(B)}_{=0} = X^2.$$

Ainsi, le spectre complexe de B est $\{0\}$ et ne contient aucun élément non nul.
Donc :

$$\boxed{\text{la matrice } B \text{ est quasi-nilpotente.}}$$

Q19. Notons f l'application qui à une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ associe sa transposée.
On sait que l'application f est linéaire.
Ainsi, $S_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}),\ M - M^\top = 0_n\}$ est le noyau de l'application linéaire $\mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{K})} - f$ et $A_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}),\ M + M^\top = 0_n\}$ est le noyau de l'application linéaire $\mathrm{Id}_{M_n(\mathbb{K})} + f$.
On en déduit que :

$$\boxed{S_n(\mathbb{K}) \text{ et } A_n(\mathbb{K}) \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } M_n(\mathbb{K}).}$$

Montrons que

$$S_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}, (E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}\right).$$

- L'inclusion réciproque est vraie car les $E_{i,j} + E_{j,i}$ et $E_{i,i}$ sont symétriques et car $S_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel.
- Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On a

$$S = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) + \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}E_{i,i} \in \mathrm{Vect}\left((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}, (E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}\right).$$

  On a donc aussi l'inclusion directe.

La famille $((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}, (E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n})$ est donc génératrice de $S_n(\mathbb{K})$.
On remarque ensuite que la famille $((E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}, (E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n})$ est libre (on considère une combinaison linéaire nulle et on a immédiatement la nullité des coefficients).
Il reste alors à compter le nombre des éléments de cette famille qui est une base de $S_n(\mathbb{K})$:

$$\boxed{\dim(S_n(\mathbb{K}))} = \sum_{i=1}^{n}(n-i) + n = \sum_{k=0}^{n-1} k + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}.}$$

Enfin, on montre par double-inclusion que $T_n^{++}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}((E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ donc :

$$\boxed{T_n^{++}(\mathbb{K}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } M_n(\mathbb{K}).}$$

Q20. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.
Ainsi, $\forall T \in T_n^{++}(\mathbb{K}),\ \mathrm{Sp}(T) = \{0\}$.
Ceci montre que :

$$\boxed{T_n^{++}(\mathbb{K}) \text{ est quasi-nilpotent dans } M_n(\mathbb{K}).}$$

On a vu que la famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ est génératrice de $T_n^{++}(\mathbb{K})$ et elle est libre (car extraite d'une famille libre, la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$) donc c'est une base de $T_n^{++}(\mathbb{K})$.
En comptant son nombre d'éléments, on obtient :

$$\boxed{\dim(T_n^{++}(\mathbb{K})) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

Q21. Notons $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
On a :

$$X^\top AX = \sum_{i=1}^{n} x_i[AX]_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-a_{j,i})x_ix_j = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{j,i}x_jx_i = -X^\top AX.$$

On en déduit que :

$$\boxed{X^\top AX = 0.}$$

En particulier, si λ est une valeur propre de A alors il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0_{n,1}$, tel que $AX = \lambda X$ et on a alors :

$$0 = X^\top AX = \lambda X^\top X$$

et comme $X \neq 0$, on a $X^{\mathsf{T}} X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0$ (car c'est une somme de termes positifs avec au moins un terme strictement positif) donc $\lambda = 0$.
On en déduit que 0 est la seule valeur propre réelle possible pour A.
Cela prouve que :

$$\boxed{A_n(\mathbb{R}) \text{ est quasi-nilpotent dans } M_n(\mathbb{R}).}$$

Q22. Comme $n \geqslant 2$, on peut considérer la matrice M définie par blocs par $M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{R})$.
Comme la matrice M est triangulaire par blocs, on a :

$$\chi_M = X^{n-2}\chi_D = X^{n-2}(X^2+1).$$

Le spectre complexe de M est soit égal à $\{i, -i\}$ (cas $n = 2$) soit égal à $\{0, i, -i\}$ (cas $n \geqslant 3$).
Raisonnons par l'absurde. S'il existe une matrice P comme dans l'énoncé, M est semblable dans $M_n(\mathbb{R})$ à un élément de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ et donc à une matrice dont 0 est la seule valeur propre complexe.
Quand deux matrices sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$ alors elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ (puisque $GL_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{C})$) donc elles ont le même spectre complexe.
On obtient alors une absurdité. Ainsi :

$$\boxed{\text{il n'existe pas de matrice inversible } P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A_n(\mathbb{R}) = \{PMP^{-1} \,|\, M \in T_n^{++}(\mathbb{R})\}.}$$

B. Cas réel

Q23. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. La matrice S est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (par le théorème spectral). Si 0 est sa seule valeur propre réelle possible, S est alors semblable à une matrice diagonale nulle et est donc nulle. Réciproquement, 0_n est symétrique et quasi-nilpotente.

$$\boxed{\text{La matrice nulle est ainsi la seule matrice symétrique quasi-nilpotente.}}$$

La question Q18 montre que le résultat est faux dans le cas complexe puisqu'on a trouvé une matrice symétrique complexe quasi-nilpotente qui n'est pas nulle.

$$\boxed{\text{Le résultat n'est plus valable en remplaçant } \mathbb{R} \text{ par } \mathbb{C}.}$$

Q24. Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $M_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, on a $V \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ donc les sous-espaces vectoriels V et $S_n(\mathbb{R})$ sont en somme directe.
Ainsi :

$$\dim(V) + \dim(S_n(\mathbb{R})) = \dim(V \oplus S_n(\mathbb{R})) \leqslant \dim(M_n(\mathbb{R}))$$

car $V \oplus S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.
On en déduit que

$$\boxed{\dim(V) \leqslant n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

C. Lemme des colonnes

Q25. La seule matrice quasi-nilpotente de $M_1(\mathbb{K})$ est la matrice nulle (puisqu'une matrice de taille 1 a une unique valeur propre égale à son unique coefficient). Donc le seul sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_1(\mathbb{K})$ est $V = \{0\}$. Comme les matrices de V n'ont qu'une colonne, $C_1(V) = V = \{0\}$.

$$\boxed{\text{Le lemme des colonnes est donc vrai dans le cas } n = 1.}$$

Q26. On a :
$$V' = \{M \in V,\ R(M) = 0_{n-1,1} \text{ et } a(M) = 0\} = V \cap \mathrm{Ker}(R) \cap \mathrm{Ker}(a)$$
(R et a sont des applications linéaires) donc par intersection de trois sous-espaces vectoriels, V' est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.
Par suite, $K(V')$ est un sous-espace vectoriel de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ car K est linéaire.
De plus, toute matrice M de V' étant triangulaire inférieure, on a :
$$\chi_M = X\,\chi_{K(M)}.$$
Les valeurs propres non nulles de M et celles de $K(M)$ sont donc les mêmes. Comme $M \in V$, M n'a pas de valeur propre non nulle donc $K(M)$ non plus donc $K(M)$ est quasi-nilpotent.

$\boxed{\text{L'ensemble } K(V') = \{K(M) \mid M \in V'\} \text{ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de } M_{n-1}(\mathbb{K}).}$

Q27. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $K(V')$ (sous-espace de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ quasi-nilpotent), il existe un élément $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $C_j(K(V')) = \{0\}$.
D'après l'hypothèse de l'absurde, $C_j(V) \neq \{0\}$ donc il existe une matrice M de V non nulle dont toutes les colonnes en dehors de la j-ème sont nulles.
Comme $j \neq n$, $M \in V'$ et donc $K(M) \in K(V')$. On sait de plus que toutes les colonnes de $K(M)$ en dehors de la j-ème sont nulles donc $K(M) \in C_j(K(V'))$ d'où $K(M) = 0$.
Ainsi, la matrice M a une unique colonne qui peut être non nulle (celle numéro j) et seul le dernier coefficient de cette colonne peut être non nul.
Comme $M \neq 0$, il existe $c \neq 0$ tel que $M = cE_{n,j}$.
Comme V est un sous-espace vectoriel, on a $E_{n,j} = \dfrac{1}{c}M \in V$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe un entier } j \in [\![1, n-1]\!] \text{ tel que } E_{n,j} \in V.}$$

Q28. On a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:
$$u_{\sigma^{-1}} \circ u_\sigma(e_j) = u_{\sigma^{-1}}(e_{\sigma(j)}) = e_{\sigma^{-1}(\sigma(j))} = e_j$$
et
$$u_\sigma \circ u_{\sigma^{-1}}(e_j) = u_\sigma(e_{\sigma^{-1}(j)}) = e_{\sigma(\sigma^{-1}(j))} = e_j.$$
Comme les applications linéaires $u_{\sigma^{-1}} \circ u_\sigma$, $u_\sigma \circ u_{\sigma^{-1}}$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$ coïncident sur une base, elles sont égales d'où :
$$u_{\sigma^{-1}} \circ u_\sigma = u_\sigma \circ u_{\sigma^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}.$$
On en déduit que :

$$\boxed{u_\sigma \text{ est bijective (c'est un automorphisme) et } (u_\sigma)^{-1} = u_{\sigma^{-1}}.}$$

Q29. La colonne j de la matrice de u_σ dans la base canonique est la colonne $e_{\sigma(j)}$. Elle a tous ses coefficients nuls sauf celui en ligne $\sigma(j)$ qui vaut 1. Son coefficient générique est donc $\delta_{i,\sigma(j)}$.
On a donc bien :
$$\boxed{Mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_\sigma) = P_\sigma.}$$
Comme u_σ est bijective, on en déduit que P_σ est inversible et :
$$(P_\sigma)^{-1} = Mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(u_\sigma^{-1}) = P_{\sigma^{-1}} = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (\delta_{\sigma(i),j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$
car $i = \sigma^{-1}(j)$ si et seulement si $j = \sigma(i)$.

$$\boxed{P_\sigma \text{ est inversible et } (P_\sigma)^{-1} = (\delta_{\sigma(i),j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.}$$

Q30. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
P_σ est la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ à la base $(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ donc d'après les formules de changement de base :

$$P_\sigma^{-1} M P_\sigma = Mat_{(e_{\sigma(i)})}(g).$$

Le coefficient à l'intersection des colonne j et ligne i est la coordonnée de $g(e_{\sigma(j)})$ selon $e_{\sigma(i)}$.
Or,

$$g(e_{\sigma(j)}) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,\sigma(j)} e_k = \sum_{l=1}^{n} m_{\sigma(l),\sigma(j)} e_{\sigma(l)}$$

Finalement :

$$\boxed{P_\sigma^{-1} M P_\sigma = (m_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.}$$

Q31. V est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ et V^σ est l'image de V par l'application linéaire $M \mapsto P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ donc V^σ est sous-un espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.
De plus, pour tout $M \in V$, $\mathrm{sp}(M) = \mathrm{sp}(P_\sigma^{-1} M P_\sigma)$ car les matrices sont semblables donc le caractère quasi-nilpotent des éléments de V entraîne celui des éléments de V^σ.
Ainsi :

$$\boxed{V^\sigma \text{ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de } M_n(\mathbb{K}).}$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On sait que $C_{\sigma(j)}(V) \neq \{0\}$ donc il existe une matrice M de V non nulle dont toutes les colonnes sont nulles en dehors de la numéro $\sigma(j)$.
Considérons alors la matrice $R = P_\sigma^{-1} M P_\sigma$.
Par définition, la matrice R appartient à V^σ et elle est non nulle (car si $P_\sigma^{-1} M P_\sigma = 0_n$ alors $M = 0_n$ par multiplication à gauche par P_σ et à droite par P_σ^{-1}).
De plus, pour tout $(i,k) \in [\![1, n]\!]$ avec $k \neq j$, on a $r_{i,k} = m_{\sigma(i),\sigma(k)} = 0$ car c'est un cœfficient de la colonne $\sigma(k)$ de M et $\sigma(k) \neq \sigma(j)$. Ainsi, $R \in C_j(V^\sigma)$.
Ainsi, $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } j \in [\![1, n]\!],\ C_j(V^\sigma) \neq \{0\}.}$$

Q32. On a montré en Q27 qu'il existe $\ell \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $E_{n,\ell} \in V$.
En posant $f(n) = \ell$, on a bien $f(n) \in [\![1, n]\!] \setminus \{n\}$ et $E_{n,f(n)} \in V$.
Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. On considère une bijection σ de $[\![1, n]\!]$ telle que $\sigma(n) = j$ (par exemple la bijection qui permute n et j et laisse les autres éléments invariants).
Comme V^σ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $M_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $C_k(V^\sigma) \neq \{0\}$, on peut lui appliquer ce qui a été prouvé en Q27 donc il existe un entier $\ell \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $E_{n,\ell} \in V^\sigma$.
Ainsi, il existe $M \in V$ telle que $E_{n,\ell} = P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ ou encore $M = P_{\sigma^{-1}}^{-1} E_{n,\ell} P_{\sigma^{-1}}$.
Soit $(a,b) \in [\![1, n]\!]^2$. En appliquant Q30 avec σ^{-1}, on trouve que $m_{a,b}$ est le cœfficient de $E_{n,\ell}$ d'indice $(\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b))$.
$m_{a,b}$ est donc nul sauf si $(\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b)) = (n, \ell)$ auquel cas il vaut 1.
Comme $(\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b)) = (n, \ell)$ si et seulement si $(a,b) = (\sigma(n), \sigma(\ell))$, on en déduit que $M = E_{j,\sigma(\ell)}$ car $\sigma(n) = j$.
En posant $f(j) = \sigma(\ell)$, on a $f(j) \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$ (on a $\sigma(\ell) \neq j$ car on a déjà $\sigma(n) = j$ et $\ell \neq n$) et $E_{j,f(j)} \in V$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } j \in [\![1, n]\!] \text{ on peut choisir un } f(j) \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\} \text{ tel que } E_{j,f(j)} \in V.}$$

Q33. Posons $i_1 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $i_{k+1} = f(i_k)$.
L'ensemble $\{i_k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$ est inclus dans $[\![1, n]\!]$ et donc fini. Or, $\mathbb{N}^*$ est infini.
Il existe donc nécessairement $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $a < b$ tel que $i_a = i_b$.
On part de i_a et on itère successivement par f jusqu'à retrouver la même valeur que i_a pour la première fois. On obtient i_a, i_{a+1}, …, i_{a+p-1} deux à deux distincts avec $i_{a+p} = i_a$.

Remarquons que $i_{a+1} = f(i_a) \neq i_a$ car pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $f(j) \neq j$ donc $p \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{En posant } j_1 = i_a,\ j_2 = i_{a+1},\ \ldots,\ j_p = i_{a+p-1}, \text{ on a des éléments deux à deux distincts et } \forall k \in [\![1, p-1]\!],\ f(j_k) = j_{k+1} \text{ et } f(j_p) = j_1.}$$

Q34. On a $Ne_{j_1} = Ne_{f(j_p)} = e_{j_p}$ et pour tout $\ell \in [\![2, p]\!]$:

$$Ne_{j_\ell} = \sum_{k=1}^{p} E_{j_k, f(j_k)} e_{f(j_{\ell-1})} = e_{j_{\ell-1}}.$$

Posons $X = \sum_{\ell=1}^{p} e_{j_\ell}$.
On a alors $NX = \sum_{\ell=1}^{p} Ne_{j_\ell} = e_{j_p} + \sum_{\ell=2}^{p} e_{j_{\ell-1}} = X$. Comme $X \neq 0$, on en déduit que :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } N.}$$

Or, en tant que somme d'éléments du sous-espace vectoriel V, $N \in V$ donc N est quasi-nilpotent, absurde puisque 1 est une valeur propre non nulle de N.

$$\boxed{\text{Cela clôt le raisonnement par l'absurde.}}$$