Travaux Dirigés de M_1

Exercice 1 : Avion de chasse

Un avion de chasse volant à vitesse constante $v = 1500$ km/h effectue un demi-tour en forme de demi-cercle de rayon $R = 6$ km. Calculer l'accélération de l'avion pendant son virage. Illustrer sur un schéma la trajectoire de l'avion, sa vitesse et son accélération à un instant donné.

L'avion a un mouvement de rotation uniforme donc $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{e}_r$, numériquement on trouve $a = 28.9$ m.s^{-2} soit environ 3 g.

Exercice 2 : Test d'accélération d'une voiture

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté.

1. Elle est chronométrée à 26,6 s au bout d'une distance $D = 180$ m. Déterminer l'accélération (supposée constante) et la vitesse atteinte à la distance D.
2. Quelle est la distance d'arrêt pour une déccélération de 7 m.s^{-1}.

1. On sait que l'accélération a est constante donc $v = at$ et $x = \frac{1}{2}at^2$, on en déduit donc $a = 2D/(\tau^2)$, avec $D = 180$ m et τ= 26,6s. Numériquement, on trouve : $a = 0{,}51$ m.s^{-2}, et $v(D) = 13{,}5$ m.s^{-1}.
2. L'accélération est constante et vaut $\gamma = -7$ m.s^{-2}, à l'instant $t = 0$ la voiture est à la position $x = 0$ et sa vitesse vaut $v_0 = 13{,}5$ m.s^{-1}. Sa vitesse au cours du temps est : $v(t) = v_0 + \gamma t$, ainsi la voiture s'arrête à l'instant $t^\star = -\frac{v_0}{gamma} = 1{,}9$ s. La position de la voiture est $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, la distance d'arrêt est donc $d = x(t^\star) = 13$ m.

Exercice 3 : LHC

Le Large Hadron Collider du CERN est un accélérateur de particule qu'on supposera circulaire et de 27 km de circonférence. Il entraine des protons jusqu'à une énergie de 7 TeV pour créer des collisions de très haute énergie.

1. En considérant la norme de la vitesse des protons constante, montrez que leur vitesse angulaire est constante. Déterminez leur vitesse angulaire et leur accélération en coordonnées polaires.
2. En utilisant la formule classique de l'énergie cinétique, déterminez la vitesse des protons dans l'accélérateur. Que remarquez vous ?
3. On donne l'expression relativiste de l'énergie : $E_c = \gamma mc^2$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$, où c est la vitesse de la lumière et m la masse du proton. On donne $mc^2 = 1$ GeV. Calculer la vitesse du proton.

Exercice 4 : Interpellation pour vitesse excessive

Un conducteur roule à vitesse constante v_0 sur une route rectiligne. Comme il est en excès de vitesse à 100km/h, un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse de 90 km/h au bout de 10 s.

1. Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ?
2. Quelle distance aura-t-il parcourure ?
3. Quelle vitesse aura-t-il atteinte ?

1. On a $x_{voiture} = V_0 t$ et $x_{moto} = \frac{1}{2}at^2$. Le gendarme rattrape la voiture à l'instant τ tel que $x_{voiture}(\tau) = x_{moto}(\tau)$. Soit $\tau = 2V_0/a = 22$ s.
2. Le motard aura parcourue une distance $D = \frac{1}{2}a\tau^2 = 605$m.

3. Sa vitesse maximale est de $V = a\tau = 198$ km/h.

Exercice 5 : Courses entre véhicules radio-commandés

Deux modèles réduits de voitures radio-commandées ont des performances différentes : le premier a une accélération de 4,0 m.s^{-2}, le second de 5,0 m.s^{-2}. Cependant l'utilisateur de la première voiture a plus de réflexes que celui de la seconde, ce qui lui permet de la faire démarrer 1 s avant le second.

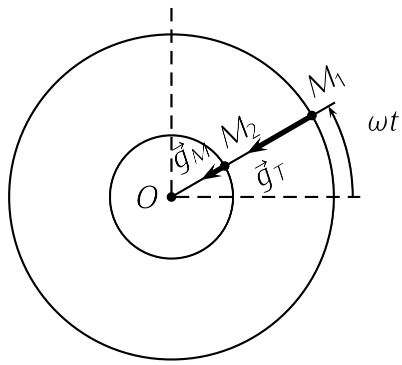
1. Déterminer le temps nécessaire au deuxième véhicule pour rattraper l'autre ?
2. Les deux modèles réduits participent à des courses de 100 m et 200 m. Est-il possible que le perdant du 100 m prenne sa revanche au 200 m.
3. Calculer pour les deux courses la vitesse finale de chacun des véhicules.

1. Pour le premier véhicule on a $x_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2$, tandis que pour le second $x_2 = \frac{1}{2}a_2(t-t_0)^2$. On cherche l'instant pour lequel $x_1 = x_2$, on trouve alors : $t^\star = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_1 a_2}}{a_2 - a_1} t_0$. On trouve donc deux solutions : 9,5 s et 0,5s, la seconde n'est pas possible puisque le véhicule 2 n'est pas parti à cette date. Il faut donc 8,5 s au second véhicule pour rattraper le premier.
2. Il suffit de reporter la valeur t^star dans l'une ou l'autre des équations horaires. On trouve x=181 m. La deuxième voiture arrive en tête du 100 m mais perd le 200 m.
3. Les vitesses valent : $v_1 = 38$m.s^{-1} et $v_2 = 42{,}5$m.s^{-1}

Exercice 6 : Laboratoire spatial

Un laboratoire spatial, constitué de deux anneaux concentriques de même axe, est en rotation uniforme autour de cet axe de manière à créer une gravité artificielle. Sa période de rotation T est choisie de manière à ce que l'accélération soit égale à $\vec{g}_T$ l'accélération de pesanteur sur Terre (9,81 m.s^{-2}) au niveau de l'un des anneaux (de rayon $r_1 = 2{,}15$ km) et à $\vec{g}_M$ l'accélération de la pesanteur sur Mars (3,72 m.s^{-2}) au niveau de l'autre.

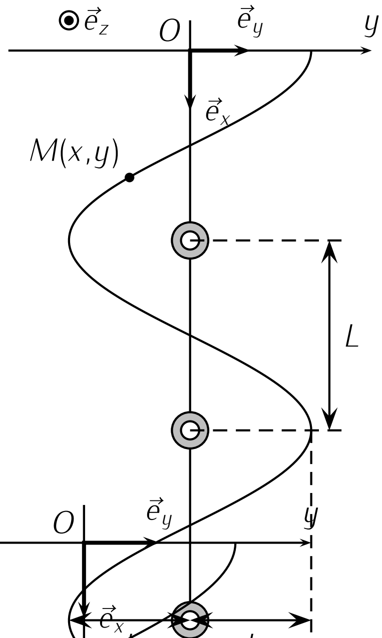
Déterminer la valeur de T et le rayon r_2 du second anneau.



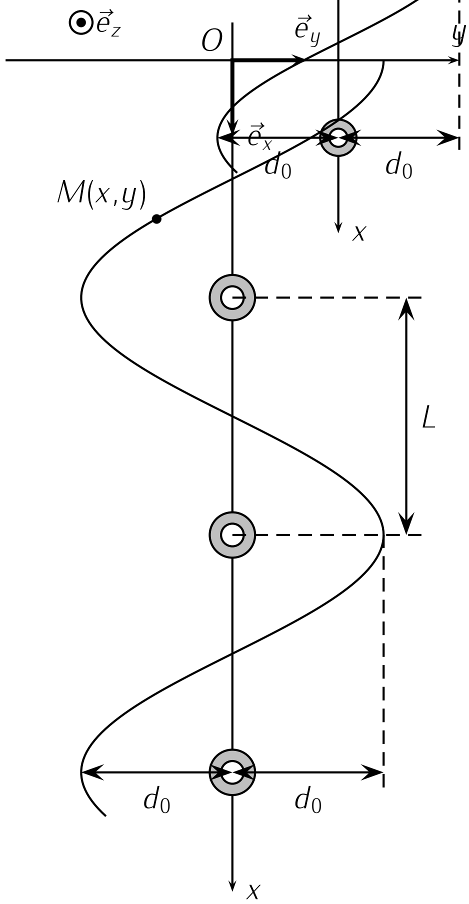
Tous les points d'un anneau sont en mouvement circulaire uniforme.
On retrouve aisément l'expression de l'accélération d'un point M_1 situé sur l'anneau de rayon r_1.
$\overrightarrow{OM_1} = r_1\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} = \frac{dr_1}{dt}\vec{e}_r + r_1\frac{d\vec{e}_r}{dt} = 0 + r_1\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r_1\omega\vec{e}_\theta$
puis $\vec{a}_1 = \frac{d\vec{v}_1}{dt} = r_1\omega\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -r_1\omega^2\vec{e}_r$.
Or, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ d'où $a_1 = \frac{4\pi^2 r_1}{T^2} = g_T \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r_1}{g_T}} \simeq 93$ s.
De même, au point M_2 du second anneau,
$a_2 = g_M = \frac{4\pi^2 r_2}{T^2} \Rightarrow r_2 = \frac{gT^2}{4\pi^2} \simeq 815$ m.

Exercice 7 : Super G

Lors d'une descente de super G, le skieur, repéré par le point M de coordonnées (x,y) dans le référentiel $\mathcal{R}(0,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, part du point $(0,d_0)$ puis est astreint à suivre une trajectoire sinusoïdale de slalom entre des portes espacées d'une distance L de manière à conserver à tout moment une vitesse dont la composante suivant Ox est constante : $\dot{x} = v_0 = 40$ km.h^{-1}.
On s'intéresse dans cette partie à la cinématique du skieur.



1. La trajectoire se met sous la forme $y(x) = A\cos(Bx)$.
   Préciser la dimension (ou l'unité) de A et celle de B.
2. Exprimer A et B en fonction de d_0 et L.
3. Déterminer l'expression de $x(t)$ puis $y(t)$.
4. En déduire les expressions des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ du skieur.
5. Pour que le skieur reste en piste, il doit conserver à tout moment une accélération inférieure à $0{,}7g$. À quelle distance minimum L_{min} doit-on placer les portes.
6. On donne $g = 9{,}8$ m.s^{-2} et $d_0 = 3$ m. Faire l'application numérique.



1. On a posé $y(x) = A.\cos(Bx)$ avec $[y] =$L : y a la dimension d'une longueur donc A également : $\boxed{[A] = \text{L}}$.
   Le terme à l'intérieur de la fonction cosinus doit être sans dimension d'où $[Bx] = [B][x] = 1$ avec $[x] =$L et finalement $\boxed{[B] = \text{L}^{-1}}$.
2. On remarque sur la figure que $y(x)$ varie entre $-d_0$ et d_0 (valeur minimale et maximale). On en déduit $\boxed{A = d_0}$.
   On remarque également que $y(x)$ est une fonction périodique de période $2L$ c'est à dire $y(x+2L) = y(x)$ pour tout x soit
   $A.\cos(Bx) = A.\cos[B(x+2L)] = A.\cos(Bx+2\pi)$ et $\Rightarrow$ $2BL = 2 \Rightarrow \boxed{B = \dfrac{\pi}{L}}$.
   On vérifie la cohérence avec le résultat précédent.
3. L'énoncé indique $\dot{x} = v_0$ constant d'où par intégration $x(t) = v_0 t + x(0)$ où $x(0) = 0$ est la valeur initiale de $x(t)$ soit $\boxed{x(t) = v_0.t}$. Et en reportant dans l'expression de $y(x)$, on en déduit $\boxed{y(t) = d_0.\cos(\dfrac{\pi v_0}{L}t)}$
4. Dans le système de coordonnées choisi, $\vec{v}(t) = \dot{x}(t).\vec{e}_x + \dot{y}(t).\vec{e}_y$ et $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t).\vec{e}_x + \ddot{y}(t).\vec{e}_y$ d'où ici

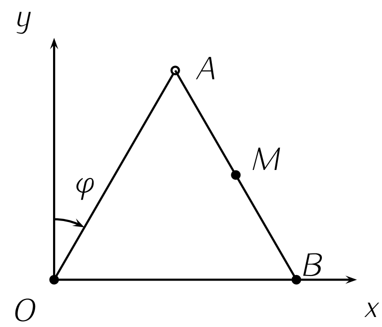
$$\boxed{\vec{v} = v_0.\vec{e}_x - \frac{d_0\pi v_0}{L}.\sin(\frac{\pi v_0}{L}t)\vec{e}_y} \text{ et } \boxed{\vec{a} = -\frac{d_0\pi^2 v_0^2}{L^2}.\cos(\frac{\pi v_0}{L}t)\vec{e}_y}$$

5. La valeur maximale de l'accélération est $a_{\text{max}} = \frac{d_0\pi^2 v_0^2}{L^2}$.

   On impose donc $\frac{d_0\pi^2 v_0^2}{L^2} < 0{,}7g \Rightarrow 0{,}7gL^2 > d_0\pi^2 v_0^2 \Rightarrow \boxed{L < L_{\text{min}} = \pi v_0\sqrt{\dfrac{d_0}{0{,}7g}}}$

6. Pour $d_0 = 3$ m et $g = 9{,}8$ m.s^{-2}, on calcule $\boxed{L_{\text{min}} \simeq 23 \text{ m}}$

Exercice 8 : Chute d'un homme sur un escabeau



Un homme est situé en M à mi hauteur d'un escabeau dont un pied noté O est appuyé contre un mur. Le pied B se met à glisser sur le sol.

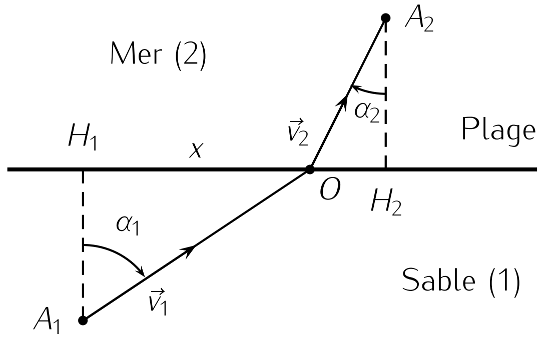
On pose $AB = OA = 2b$ et l'angle $(Oy,\overrightarrow{OA}) = \varphi = \omega t$ et on prendra ω constante.

1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de M et la représenter.

2. Déterminer son accélération dans le référentiel lié au sol.

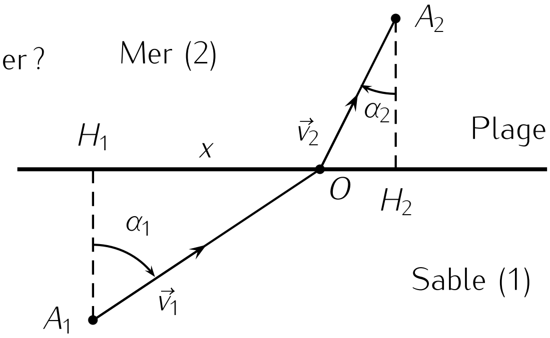
1. $\frac{x^2}{9b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipse.
2. $\vec{a} = -3b\omega^2 \cos\omega t.\vec{e}_x - b\omega^2 \sin\omega t.\vec{e}_y$.

Exercice 9 : Optimisation d'un trajet



Soit une plage P, séparation entre deux milieux différents : le sable (milieu (1)) et la mer (milieu (2)).
Un point A_1 sur le sable est à la distance $A_1H_1 = a_1$ de P.
Un point A_2 en mer est à la distance $A_2H_2 = a_2$ de P. On pose $H_1H_2 = d$.
Un maître nageur I est en A_1 au moment où il repère une jolie nageuse en difficulté en A_2.
Il peut courir sur le sable à la vitesse v_1 et nager à la vitesse $v_2 < v_1$, on notera τ la durée du parcours A_1OA_2.
Quel trajet doit-il emprunter pour rejoindre A_2 le plus rapidement possible ?
On déterminera d'abord l'équation que doit vérifier $x = H_1O$, puis on simplifiera l'expression obtenue en introduisant les angles $\alpha_1 = (\overrightarrow{A_1H_1}, \overrightarrow{A_1O})$ et $\alpha_2 = (\overrightarrow{A_2H_2}, \overrightarrow{A_2O})$

À quelle loi physique l'expression obtenue vous fait-elle penser ?



On décompose $\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{A_1O}{v_1} + \frac{OA_2}{v_2}$ la durée du parcours sur les deux parties du trajet.
Par utilisation du théorème de Pythagore dans le triangle A_1H_1O, on détermine
$A_1O^2 = A_1H_1^2 + H_1O^2 = a^2 + x^2$ et de même, dans A_2OH_2 on lit $A_2I^2 = A_2H_2^2 + OH_2^2 = b^2 + (d-x)^2$.
D'où $\tau = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}$
τ est une fonction de x, elle est minimale quand sa dérivée par rapport à la variable x s'annule.
On part donc de l'équation $\frac{d\tau}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}{v_1} + \frac{(b^2+(d-x)^2)^{\frac{1}{2}}}{v_2}\right] = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_1}\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x + \frac{1}{v_2}\frac{1}{2}(b^2+(d-x)^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2(d-x)(-1) = 0$$

D'où après simplification,

$$\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = 0$$

En remarquant que $\sin i_1 = \frac{H_1O}{A_1O} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ et $\sin i_2 = \frac{OH_2}{IA_2} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ on obtient la relation $\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}$.
Cette relation ressemble étrangement à la loi de Snell-Descartes pour la réfraction. On retrouve bien la relation $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ en posant $n_1 = \frac{c}{v_1}$ et $n_2 = \frac{c}{v_2}$.

Exercice 10 : Équation horaire

Un mobile décrit un axe Ox avec une vitesse v qui à l'instant t est liée à son abscisse x par la relation de la forme $x = a\sqrt{v} - b$.
Déterminer la loi horaire $x(t)$ en prenant $x = 0$ à $t = 0$. Vérifier l'homogénéité du résultat.
Ici s'agit ici d'un pur exercice de cinématique ...
On part de l'expression $x = a\sqrt{v} - b$ et on cherche à déterminer $x(t)$ en utilisant $v = \frac{dx}{dt}$.

$$x = a\sqrt{v} - b \Rightarrow v = \frac{1}{a^2}(x+b)^2 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{(x+b)^2} = \frac{1}{a^2}dt$$

On vient d'effectuer une séparation de variables (x et t de part et d'autre de l'égalité).

Par intégration de l'équation précédente, on obtient $-\frac{1}{x+b} = \frac{t}{a^2} + C$ où C est une constante. Or, à $t = 0$, on a posé $x = 0$ d'où $-\frac{1}{0+b} = 0 + C \Rightarrow C = -\frac{1}{b}$ et

$$-\frac{1}{x+b} = \frac{t}{a^2} - \frac{1}{b} = \frac{bt - a^2}{a^2 b} \Rightarrow x + b = -\frac{a^2 b}{bt - a^2} \Rightarrow x = \frac{-a^2 b - b^2 t + a^2 b}{bt - a^2} \Rightarrow x = \frac{-b^2 t}{a^2 - bt}$$

Pour vérifier l'homogénéité de cette relation, il faut déterminer la dimension de a et b. On utilise la relation $x = a\sqrt{v} - b$ qui implique que $[b] = L$ et $a = \frac{x+b}{\sqrt{v}}$ et $[a] = L.L^{-\frac{1}{2}}.T^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}}.T^{\frac{1}{2}}$.

On a alors $\left[\frac{-b^2 t}{a^2 - bt}\right] = \frac{L.T.L}{L.T} = L$ est bien homogène à une longueur.

Exercice 11 : **Poursuite en spirale**

Dans la cour de récréation, trois enfants (A, B et C) forment un triangle équilatéral de coté l.
À l'instant initial, chacun d'entre eux part à la poursuite de l'enfant qui est devant lui, à la même vitesse v_0 et dans le sens trigonométrique.

1. Exprimez $l(t)$ avec $l(t = 0) = l_0$.
   On dérivera l'expression $l(t)^2 = \overrightarrow{AC}^2$ par rapport au temps.
2. Au bout de combien de temps se rencontreront-ils ? Quelle distance d auront-ils parcouru ?

1. $l = -\frac{3}{2}v_0 t + l_0$. 2. $\tau = \frac{2l_0}{3v_0}$ et $d = \frac{2l_0}{3}$.