

Complexes - primitive et intégrale 1

DM 5

Exercice 1 : Des sommes, des complexes et de la trigonométrie

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs des sommes A_n et B_n suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx) \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$$

(on rappelle que la notation $\cos^2(kx)$ signifie $(\cos(kx))^2$).

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $Z_\theta = (1 - e^{i\theta})$ Montrez que $Z_\theta = e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i \sin \frac{\theta}{2})$

2. On considère $C_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$

a) On suppose qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2m\pi$.

Calculez C_n et S_n .

b) On suppose maintenant que x ne s'écrit pas sous forme $x = 2m\pi$.

Montrez que $C_n + iS_n$ est un quotient de deux nombres complexes de la forme Z_θ pour deux expressions de θ que vous préciserez.

c) En déduire, toujours dans le cas où x ne s'écrit pas $2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, que

$$C_n + iS_n = (\cos(\frac{n}{2}x) + i \sin(\frac{n}{2}x)) \times \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}}$$

et en déduire C_n et S_n .

3. a) Calculez $A_n + B_n$.

b) Montrez que $A_n - B_n = \sum_{k=0}^n \cos(2kx)$

c) En déduire les valeurs de A_n et B_n en distinguant deux situations pour x .

Exercice 2 : Intégrales de Wallis : intégrales et trigonométrie !

Le but du problème est de calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

1. A l'aide d'un changement de variable, montrez que $I_n = J_n$.

2. Calculez I_0 , I_1 , I_2 et I_3

3. En intégrant par partie, montrez que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

4. En déduire par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}$.

5. Montrez que la suite (u_n) définie par $u_n = (nI_n I_{n-1})$ est constante. On précisera la valeur de cette constante.

6. En déduire une expression de I_{2p+1} .