Analyse - Chapitre 5 : Primitives, intégrales, équations différentielles.

- Feuilles d'exercices -

Exercice 1 :

Déterminez une primitive des fonctions suivantes en précisant l'intervalle de travail.

1. $f : x \mapsto x\cos(x^2)$
2. $f : x \mapsto 2x^2(x^3+1)^4$
3. $f : x \mapsto \tan x$
4. $f : x \mapsto xe^{x^2}$
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^5}$
7. $f : x \mapsto \dfrac{x}{(3+x^2)^2}$
8. $f : x \mapsto \sin(3x+1)$
9. $f : x \mapsto e^{2x-3}$
10. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$
11. $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$
12. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+4x^2}$

Exercice 2 :

Etudiez l'ensemble de définition, puis déterminez une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+x-6}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-1}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{x^2-4x+4}$
5. $f : x \mapsto \dfrac{x+4}{x^2+4x+5}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+5}$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2+x+2}$.

Exercice 3 :

Déterminez une primitive des fonctions suivantes en précisant les intervalles sur lesquels vous travaillez.

1. $f : x \mapsto xe^{3x+1}$
2. $f : x \mapsto x^2e^x$
3. $f : x \mapsto (\ln(x))^2$
4. $f : x \mapsto x^4\ln(x)$
5. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$
6. $f : x \mapsto x^3e^{x^2}$
7. $f : x \mapsto \arctan(x)$
8. $f : x \mapsto \arcsin(x)$
9. $f : x \mapsto e^x\cos 2x$

Exercice 4 :

Justifiez l'existence des intégrales suivantes et calculez les :

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos x|\,dx$
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x|x|\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(2x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$ (écrire sous la forme $\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{bx}{x^2+1}$).
8. $\displaystyle\int_1^{e} \ln(\sqrt{x})\,dx$.

Exercice 5 :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{(1+2x)^2}$.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f, noté D_f, et montrez que
$$\exists A, B \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, f(x) = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{(1+2x)^2}$$
2. Déterminez une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{-2x}}{(1+2e^{-x})^2}$

Exercice 6 :

Calculez les intégrales ou primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$ (poser $x = 2\cos t$, $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$)
2. $\displaystyle\int_2^7 \frac{\sqrt{2+x}}{x+1}dx$ (poser $u = \sqrt{2+x}$).
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t dt$. (poser $u = \sin(t)$)
4. Donnez une primitive à $x \mapsto \dfrac{2e^x+1}{e^x+1}$

Exercice 7 :

Soit $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ et soit $G(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$

1. Montrez que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrez que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculez $F'(x)$.
3. Déterminez le domaine de définition de G.
4. Exprimez G en fonction de F et montrez que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Calculez $G'(x)$ et donner une expression simple de la fonction G.

Exercice 8 :

Résoudre les équations différentielles suivantes sur un intervalle à préciser :

1. $y'(t) - \cos(t)y(t) = 0$;
2. $e^t y'(t) - ty(t) = 0$;
3. $ty'(t) - \ln(t)y(t) = 0$

Exercice 9 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. sur $\mathbb{R}$, $\quad y' - \dfrac{t}{1+t^2}y = t$
2. sur $\mathbb{R}_+^*$, $\quad t(1+\ln^2(t))y' + 2y\ln(t) = 1$
3. sur $\mathbb{R}_-^*$, $\quad ty' - 2y = t$;
4. sur $]1, +\infty[$, $\quad (t^2-1)y' - 2ty = (t^2-1)^2$;
5. sur $\mathbb{R}$, $\quad (1+x^2)y' + 2xy = 1$.

Exercice 10 :

1. Soit l'équation différentielle $xy' - 2y = 1$
   a) Résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$, puis sur $]0, +\infty[$.
   b) Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$, puis celles vérifiant $y(-1) = -1/2$
2. Soit l'équation $xy' - y = x^2 \arctan x$.
   a) Résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$, puis sur $]0, +\infty[$.
   b) Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$, puis celles telles que $y(0) = 0$.