Analyse Chap 4 : Equations différentielles à coefficients constants. Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $3y + 2y' = 1$
2. $y' = 2y + 3$
3. $y' - 3y = 3\cos(2x)$
4. $3y' + 2y = 1$ et $y(0) = 1$
5. $y' + 2y = \sin(x)$ et $y(0) = 0$

Exercice 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $y'' + 2y' + y = 1$
2. $y'' + y' + y = -3.$
3. $y'' + 3y' + 2y = e^x$, puis $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$.
4. $y'' + y' - 2y = \sin(3x)$
5. $y'' + y' - 6y = 4$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.
6. $y'' - 2y' + 2y = 2$, $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$
7. $y'' + 2y' + 5y = -5$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

---

1. $E_c : r^2 + 2r + 1 = 0$ Racine double -1 : les solutions de l'équation homogène sont de la forme
$$y(x) = (Ax + b)e^{-x}$$
avec $A, B \in \mathbb{R}$.
Solution particulière constante, égale à 1.
D'où l'ensemble des solutions :
$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto (Ax + B)e^{-x} + 1$$

2. $E_c : r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \dfrac{-1 + i(\sqrt{3}}{2}$ ou $r = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$
Solutions de l'équation homogène :
$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \left(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right)$$
Solution particuliere, constante égale à -3, d'où les solutions de l'équation :
$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \left(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right) - 3$$

3. Solutions de l'équation homogène (E_c a pour racine -1 et -2) :
$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x}$$
Pour le second membre en e^x : comme 1 (du $e^{1.x}$) n'est pas racine de E_c, on cherche une solution sous la forme λe^x avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On remplace dans l'équation et cela donne $\lambda e^x + 3\lambda e^x + 2\lambda e^x = e^x$, c'est à dire $\lambda = \dfrac{1}{6}$.
Ainsi :
$$y'' + 3y' + 2y = e^x \;\Leftrightarrow\; \exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{1}{6}e^x$$
Pour le second membre en e^{-x}, comme $-x$ est solution de E_c, on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = \lambda xe^{-x}$
On a alors $y_p'(x) = \lambda(e^{-x} - xe^{-x})$ et $y_p''(x) = \lambda(-2e^{-x} + xe^{-x})$
On remplace dans l'équation et il vient
$$\lambda e^{-x}(-2 + x + 4 - 3x + 2x) = e^{-x}$$
d'où $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et
$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \;\Leftrightarrow\; \exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}$$

...

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y(x) = Ae^{x} + Be^{-2x} - 2\sin(2x) - 2\cos(2x)$$

4. Les solutions générales sont

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x} - \frac{2}{3}$$

Le problème de Cauchy donne

$$\begin{cases} A + B &= \dfrac{2}{3} \\ 2A - 3B &= -1 \end{cases}$$

C'est à dire $A = \dfrac{3}{15}$ et $B = \dfrac{7}{15}$
D'où l'unique solution au problème de Cauchy :

$$y(x) = \frac{3}{15}e^{2x} + \frac{7}{15}e^{-3x} - \frac{2}{3}$$

5. Les solutions générales sont

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y(x) = e^{x}(A\cos(x) + B\sin(x) + 1$$

de $y(0) = 2$ on tire directement $A = 1$.
On a ensuite $y'(x) = e^{x}(\cos(x) + B\sin(x) - \sin(x) + B\cos(x))$ et de $y'(0) = 1$ on tire $B = 0$.

6. Les solutions générales sont

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y(x) = e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) - 1$$

$y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ donnent $A = 1$ et $B = 2$.

Exercice 3 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f'(-x)$.

1. Montrez que f est dérivable au moins deux fois sur $\mathbb{R}$.
2. Trouvez toutes les fonctions f répondant au problème.

Lycée Victor Hugo - Besançon

Analyse Chap 4 : Equations différentielles à coefficients constants. Feuille d'exercices

PCSI2 – Mathématiques 2024-2025

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $3y + 2y' = 1$
2. $y' = 2y + 3$
3. $y' - 3y = 3\cos(2x)$
4. $3y' + 2y = 1$ et $y(0) = 1$
5. $y' + 2y = \sin(x)$ et $y(0) = 0$

Exercice 2 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $y'' + 2y' + y = 1$
2. $y'' + y' + y = -3$.
3. $y'' + 3y' + 2y = e^{x}$, puis $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$.
4. $y'' + y' - 2y = \sin(3x)$
5. $y'' + y' - 6y = 4$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$.
6. $y'' - 2y' + 2y = 2$, $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$
7. $y'' + 2y' + 5y = -5$, $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $E_c : r^2+2r+1=0$ Racine double -1 : les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$y(x) = (Ax+b)e^{-x}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$.
Solution particulière constante, égale à 1.
D'où l'ensemble des solutions :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto (Ax+B)e^{-x}+1$$

2. $E_c : r^2+r+1=0 \Leftrightarrow r = \dfrac{-1+i(\sqrt{3}}{2}$ ou $r = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
Solutions de l'équation homogène :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right)$$

Solution particuliere, constante égale à -3, d'où les solutions de l'équation :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+B\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right)-3$$

3. Solutions de l'équation homogène (E_c a pour racine -1 et -2) :

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto Ae^{-x}+Be^{-2x}$$

Pour le second membre en e^x : comme 1 (du $e^{1.x}$) n'est pas racine de E_c, on cherche une solution sous la forme λe^x avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
On remplace dans l'équation et cela donne $\lambda e^x+3\lambda e^x+2\lambda e^x = e^x$, c'est à dire $\lambda = \dfrac{1}{6}$.
Ainsi :

$$y''+3y'+2y = e^x \;\Leftrightarrow\; \exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto Ae^{-x}+Be^{-2x}+\frac{1}{6}e^x$$

Pour le second membre en e^{-x}, comme $-x$ est solution de E_c, on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = \lambda xe^{-x}$
On a alors $y_p'(x) = \lambda(e^{-x}-xe^{-x})$ et $y_p''(x) = \lambda(-e^{-x}-e{-}x+xe^{-x})$
On remplace dans l'équation et il vient

$$\lambda e^{-x}(-2+x+4-3x+2x) = e^{-x}$$

d'où $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et

$$y''+3y'+2y = e^{-x} \;\Leftrightarrow\; \exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto Ae^{-x}+Be^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-x}$$

...

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y(x) = Ae^{x}+Be^{-2x}-2\sin(2x)-2\cos(2x)$$

4. Les solutions générales sont

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y(x) = Ae^{2x}+Be^{-3x}-\frac{2}{3}$$

Le problème de Cauchy donne

$$\begin{cases} A+B &= \dfrac{2}{3} \\ 2A-3B &= -1 \end{cases}$$

C'est à dire $A = \dfrac{3}{15}$ et $B = \dfrac{7}{15}$
D'où l'unique solution au problème de Cauchy :

$$y(x) = \frac{3}{15}e^{2x}+\frac{7}{15}e^{-3x}-\frac{2}{3}$$

5. Les solutions générales sont

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y(x) = e^{x}(A\cos(x) + B\sin(x) + 1$$

de $y(0) = 2$ on tire directement $A = 1$.
On a ensuite $y'(x) = e^{x}(\cos(x) + B\sin(x) - \sin(x) + B\cos(x))$ et de $y'(0) = 1$ on tire $B = 0$.

6. Les solutions générales sont

$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y(x) = e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) - 1$$

$y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ donnent $A = 1$ et $B = 2$.

Exercice 3 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f'(-x)$.

1. Montrez que f est dérivable au moins deux fois sur $\mathbb{R}$.
2. Trouvez toutes les fonctions f répondant au problème.