

Analyse Chap 3 : Trigonométrie

Feuille d'exercices

Exercice 1 :

On donne : $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. En déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

Exercice 2 :

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$;

6. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;

2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3. $\tan(x) = 1$

8. $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{4\pi}{5}\right)$.

4. $\cos(x) = \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

9. $2\sin(x) + 1 < 0$

5. $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$

10. $2\cos(4x) - \sqrt{3} \geq 0$

Exercice 3 : Transformation amplitude et phase : exercice/cours

1. Soient A et $B \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et soit

$$u = A \cos(\theta) + B \sin(\theta)$$

Soit $R = \sqrt{A^2 + B^2}$.

a) Justifiez qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{A}{R} = \cos(\alpha)$ et $\frac{B}{R} = \sin(\alpha)$

b) En déduire qu'on peut écrire $u = R \cos(\theta + \varphi)$ où $R > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Remarque : R est appelé amplitude de u , et φ est appelé phase.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(2t) + \frac{\sqrt{6}}{2} \sin(2t)$.

Déterminez $R > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $x(t) = R \cos(2t + \varphi)$.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations trigonométriques suivantes :

1. $\sin x + \cos x = 1$

4. $\sqrt{2} \cos(3x) + \sqrt{6} \sin(3x) = 2$

6. $-3 \sin(3x) + 3\sqrt{3} \cos(3x) < 3$

2. $\sqrt{3} \cos x - \sin x = -1$

5. $\sin x - \cos x > 1$

7. $1 - \cos 2x + \sin x \geq 0$

3. $\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = 1$

Exercice 5 :

On veut montrer, sans dériver, que pour tout $x \geq 0$,

$$\arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

1. Soit $\theta = \arctan(x+1) - \arctan(x)$. Justifiez que $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

2. Calculez $\tan(\theta)$ et concluez.