Algèbre Chapitre 7 : Polynômes
Feuille d'exercices

Exercice 1 : Echauffement calculatoire

Développer les polynômes suivants :

1. $(2X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)(X^2 - 3X + 1)$
2. $(X^3 + X^2 - X - 1)(X^2 - 2X - 1)$
3. $(X^2 - 4X + 1)(X^4 - X^2 + 3X + 2)$
4. $P(Q)$ et $Q(P)$ avec $P = X^2 + X + 1$ et $Q(X) = X^2 - 1$
5. $P(X) = (X-1)^2 \sum_{k=1}^{n} kX^{k-1}$

Exercice 2 :

Soient a,b,c et d des nombres réels. Montrez qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(-1) = a$, $P'(-1) = b$, $P(1) = c$ et $P'(1) = d$.

Exercice 3 :

On appelle polynôme pair tout polynôme P tel que $P(-X) = P(X)$, et polynôme impair tout polynôme P tel que $P(-X) = -P(X)$.

Montrez que tous les coefficients d'indices impairs d'un polynôme pair sont nuls. Que dire des coefficients d'un polynôme impair ?

Exercice 4 :

Déterminez le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^4 - X^3 + 3X^2 + X - 1$ et $B = X^2 + X$
2. $A = X^4 - 2X^2 + X$ et $B = X - 1$
3. $A = X^n$ et $B = X^2 - X - 2$.
4. $A = X^n - 3X + 1$ et $B = X^2 - 3X + 2$.
5. $A = X^n$ et $B = X^2 - 2X + 1$.

Exercice 5 :

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définie par récurrence par

$$\begin{cases} P_0 = \dfrac{1}{2} \\ P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1} - X^2 P_n \end{cases}$$

1. Montrez qu'il existe une suite réelle (a_n) telle que $P_n(X) = a_n X^n$.
2. Calculez P_n.

Exercice 6 :

1. Trouvez tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $P(x+y) = P(x)P(y)$
2. Même question avec $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $P(xy) = P(x) + P(y)$.
3. En déduire que le logarithme et l'exponentielle ne peuvent pas être des fonctions polynomiales.

Exercice 7 :

Montrez que les seuls polynômes périodiques sont les polynômes constants.

Exercice 8 : Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots a_n$ des scalaires deux à deux distincts et $b_0, \dots b_n$ des scalaires.
On définit pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$L_i = \frac{1}{\prod\limits_{j \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\}} (a_i - a_j)} \cdot \prod_{j \in [\![0;n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j).$$

1. On considère le cas $n = 2$ avec $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $a_2 = 2$. Écrire les polynômes L_0, L_1 et L_2.
2. On revient au cas général.
   Montrer que pour tout $(i, k) \in [\![0, n]\!]^2, L_i(a_k) = \delta_{i,k}$.
3. Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} b_i L_i$. Montrer que P est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que : $\forall k \in [\![0; n]\!], P(a_k) = b_k$.

Exercice 9 :

1. Déterminez les polynômes P tels que $P(3X) = P'(X)P''(X)$
2. Même question avec $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

Exercice 10 :

Déterminez l'ordre de multiplicité de la racine α dans les polynômes P suivants :

1. $\alpha = 2$ et $P(X) = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$
2. $\alpha = -2$ et $P(X) = X^5 + 7X^4 + 16X^3 + 8X^2 - 16X - 16$
3. $\alpha = 1$ et $P(X) = X^{2n} - (2n + 1)X^{n+1} + (2n + 1)X^n - X$

Exercice 11 :

1. Montrez que $X + 2$ divise $X^4 + 3X^3 + X^2 + 4$
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X + 1)^2$ divise $P = X^{4n+2} + 2X^{2n+1} + 1$.
3. Montrez que pour tout $n \geq 1$, le polynôme $nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n$ est divisible par $(X - 1)^3$.

Exercice 12 :

Trouver les réels a et b tel que $(X - 1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$.

Exercice 13 :

Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $X^2 + X + 1$ divise le polynôme $(X + 1)^{2n+1} + X^{n+2}$.

Exercice 14 :

Ecrire la décomposition primaire des polynômes suivants dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^2 + X + 1$
2. $-3X^2 + 5X + 2$
3. $2X^3 + 3X^2 - 3X - 2$
4. $X^4 - X^2 + 1$
5. $X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$
   (indication $1 + i$ est racine)
6. $X^6 + 1$
7. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$

Exercice 15 :

Déterminez la décomposition en éléments simples de $\mathbb{R}[X]$ des fractions rationnelles suivantes et en déduire une primitive et les dérivées n-ième de la fonction associée :

1. $F(X) = \dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$
2. $F(X) = \dfrac{X^3 + X}{X^2 - 4X + 3}$
3. $F(X) = \dfrac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}$
4. $F(X) = \dfrac{X - 2}{X(X - 1)^2}$ sous la forme $F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X - 1} + \dfrac{c}{(X - 1)^2}$