Chapitre 6 : Nombres complexes - Partie 2
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$$x = 2 - 2i \qquad y = 1 + i\sqrt{3} \qquad z = 3 + i\sqrt{3} \qquad t = -1 + i\sqrt{3}$$

$$u = \left(-1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 \qquad w = \frac{1+i}{1-i} \qquad \lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$$

Exercice 2 :

Donner une forme exponentielle des complexes suivants (θ est un réel) :

$$\begin{aligned} z &= 4\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right). \\ u &= -3e^{i\frac{2\pi}{9}} \\ v &= 1 + e^{4i\theta} \\ w &= (1 + i\tan(\theta))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{(1+i\sqrt{3})(\sin\theta + i\cos\theta)}{2(1-i)(\cos\theta - i\sin\theta)} \\ b &= \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{1-i} \\ c &= \frac{9\sqrt{3}+3i}{2+i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

Soit $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Ecrire j sous forme exponentielle. Montrez que $\bar{j} = j^2$.
2. Résoudre l'équation $z^3 = 1$
3. Déterminez les solutions de l'équation $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$

Exercice 4 :

Soit $x = 1 + i$ et $y = \sqrt{3} - i$. Déterminer la forme trigonométrique de x et y, puis celle de xy.
En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 5 :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$ l'équation $(E_t) : z^2 - 2tz + 1 = 0$.
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe. Déterminer l'ensemble des points M_t d'affixe z tel que z est solution de E_t lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

AVERTISSEMENT : exercice TRES difficile, surtout la question 2.

1. On calcule le discriminant et on trouve $\Delta = 4t^2 - 4 = 4(t^2-1)$ Ainsi, $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow t \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et dans ce cas :

$$(E_t) \Leftrightarrow z = -t - \sqrt{t^2-1} = z_1 \text{ ou } z = -t + \sqrt{t^2-1} = z_2$$

D'autre part, si $t \in]-1, 1[$, alors $\Delta < 0$ et

$$(E_t) \Leftrightarrow z = -t - i\sqrt{1-t^2} = z_1 \text{ ou } z = -t + i\sqrt{1-t^2} = z_2$$

2. Question très difficile, même pour $t \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$! On cherche à interpréter graphiquement les points M_t et voir quel "dessin" cela fait quand on fait varier t.
Pour $t \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, M_t est sur l'axe des abscisses, puisque $z \in \mathbb{R}$. Reste à voir ce qui est parcouru.
Occupons nous de $z_1 = -t - \sqrt{t^2-1}$ et posons $f(t) = -t - \sqrt{t^2-1}$. La fonction f ainsi définie est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et on a $f'(t) = -1 - \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}} = \dfrac{-\sqrt{t^2-1}-t}{\sqrt{t^2-1}}$, qui est du signe de $-\sqrt{t^2-1} - t$. On résout donc $-\sqrt{t^2-1} - t \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-1} + t \leq 0$.

On a alors :

$$\sqrt{t^2-1}+t \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2-1} \leq -t$$

Si $t \leq -1$, alors $-t \geq 0$ et comme $x \mapsto x^2$ est croissante strictement sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{t^2-1} \leq -t \Leftrightarrow t^2-1 \leq t^2 \Leftrightarrow -1 \leq 0$, ce qui est toujours vrai, ainsi f est croissante sur $]-\infty,-1]$.
D'autre part, si $t \geq 1$, alors $t-t \leq 1 < 0$, donc $\sqrt{t^2-1} \leq -t$ est impossible. Ainsi, sur $\forall t \in]1,+\infty, -\sqrt{t^2-1}-t < 0$ et f est décroissante sur $]1,+\infty[$.
Il reste à déterminer les limites : en $+\infty$, on n'a pas de problème : $\lim_{t \to +\infty} -t-\sqrt{t^2-1} = -\infty$ par somme de limites égales à $-\infty$. En 1, $f(t) = -1$ ainsi

$$\boxed{\text{quand } t \text{ varie de } 1 \text{ à } +\infty, \text{ le point } M_t \text{ associé } z_1 \text{ décrit l'axe }]-\infty,-1]}$$

En -1, $f(t) = 1$ et pour la limite en $-\infty$, on multiplie et divise par l'expression conjuguée :

$$-t-\sqrt{t^2-1} = \frac{(-t)^2-(t^2-1)}{-t+\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{-t+\sqrt{t^2-1}}$$

Comme $\lim_{t \to -\infty} -t+\sqrt{t^2-1} = +\infty$, on obtient $\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0$, ainsi

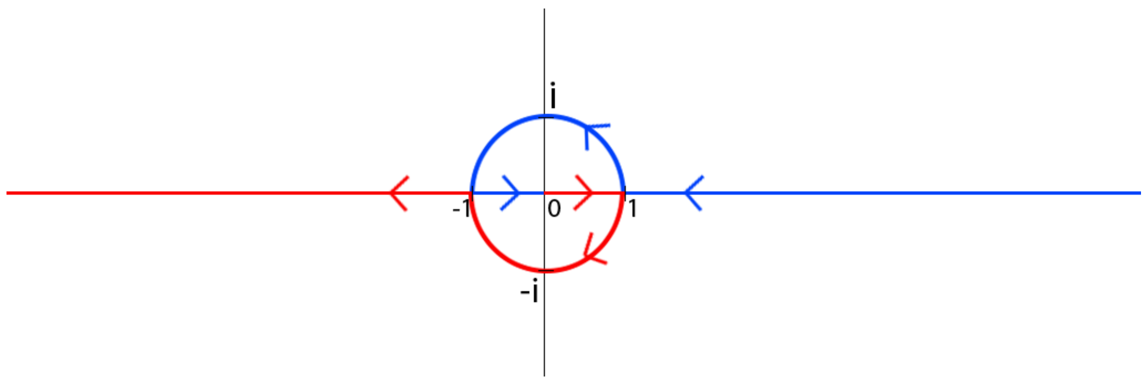
$$\boxed{\text{quand } t \text{ varie de } -\infty \text{ à } -1, \text{ le point } M_t \text{ associé à } z_1 \text{ décrit le segment } [0,1] \text{ (en partant de 0).}}$$

Pour $z_2 = -t+\sqrt{t^2-1}$, on fait la même étude (que je vous invite à faire : elle est un peu plus simple que pour z_1) et on obtient :

$$\boxed{\text{quand } t \text{ varie de } -\infty \text{ à } -1, \text{ le point } M_t \text{ associé à } z_2 \text{ décrit le demi axe } [1,+\infty[\text{ (en partant de } +\infty).}$$

$$\boxed{\text{quand } t \text{ varie de } 1 \text{ à } +\infty, \text{ le point } M_t \text{ associé à } z_2 \text{ décrit le segment } [-1,0] \text{ (en partant de } -1).}$$

Passons maintenant au cas $\Delta < 0$, c'est à dire $t \in]-1,1[$, en fait plus simple à traiter !
Commençons par $z_1 = -t-i\sqrt{1-t^2}$. Alors $|z_1| = (-t)^2+1-t^2 = 1$: on est sur le cercle trigonométrique ! Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $-t = \cos(\theta)$ et $-\sqrt{1-t^2} = \sin(\theta)$. Comme $-\sqrt{1-t^2} < 0$, on peut supposer $\theta \in [-\pi, 0]$. Plus précisément, pour $t = -1$, $\theta = 0$ et pour $t = 1$, on va avoir $\theta = -\pi$ (avec, pour $t = 0$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$.
Ainsi, quand t parcourt $]-1,1[$, le point M_t associés à z_1 parcourt le demi cercle inférieur dans le sens inverse du sens trigonométrique.
De la même façon, on peut montrer que quand t parcourt $]-1,1[$, le point M_t associé à z_2 décrit le demi cercle supérieur dans le sens trigonométrique.
Au final, on obtient le dessin suivant, avec, en rouge, le trajet en fonction du "temps" t de M_t pour z_1, et en bleu celui de z_2 :



Exercice 6 :

Ecrire sous forme algébrique le complexe $(1 - i\sqrt{3})^{10}$.

Exercice 7 :

1. Ecrire les expressions suivantes en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ (pour $t \in \mathbb{R}$) :
   (a) $\sin(4t)$
   (b) $\cos(5t)$
2. Ecrire les expressions suivantes en fonction de combinaison linéaires de $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ (pour $x \in \mathbb{R}$) :
   (a) $\cos^3(x)$
   (b) $\cos^4(x)sin(x)$

Exercice 8 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En considérant $C_n + iS_n$, déterminez les valeurs de C_n et S_n définis par :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Exercice 9 :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$,

$$z^5 = \frac{1+i}{1-i}.$$

Exercice 10 :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $e^z = 1 + i$.

Exercice 11 :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $(z+1)^2 = i + \sqrt{3}$.

Exercice 12 :

On considère trois points du plan A, B et C, et on note a, b et c les affixes complexes correspondantes.

1. Interpréter géométriquement l'égalité $(|a-b| - |a-c|)(|b-a| - |b-c|)(|c-a| - |c-b|) = 0$. A quelle condition sur A, B et C est elle vérifiée ?
2. Interpréter géométriquement l'égalité $(|a-b| - |a-c|)^2 + (|b-a| - |b-c|)^2 = 0$. A quelle condition sur A, B et C est elle vérifiée ?

Exercice 13 :

A quelle condition sur z les points d'affixe 0, z et z^3 sont-il alignés ?

Exercice 14 :

Résoudre les équations suivantes géométriquement

1. $|z+i| = 3$.
2. $|z-1| = |z-i|$.
3. $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$.

Exercice 15 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixe z, z^2 et $z+i$ est rectangle en M.