Analyse - Chapitre 5

Primitives - intégrales

Rappels, compléments et applications

I Primitives :

1) Définitions et lien avec l'intégrale :

a) Primitives :

Définition :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et f une fonction définie sur I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F, dérivable sur I et telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f$.

Exemples :
Une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est

Donnons une primitive de $f : x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$:

b) Propriété immédiate : linéarité

Comme la dérivation est linéaire, la "primitivation" l'est également :

Propriété 1 :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, admettant comme primitive respectivement F et G. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors
une primitive de $\alpha f + \beta g$ est $\alpha F + \beta G$.

▷ *Preuve* : Immédiat car $(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$ ◁

c) Existence des primitives :

Theorème 1 :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet (au moins) une primitive.

▷ *Preuve* : Admis pour le moment. ◁

Danger ! LES PRIMITIVES NE SONT PAS FORCÉMENT EXPRIMABLES...

Ce théorème affirme qu'une primitive existe, mais cela ne veut pas dire qu'on puisse l'exprimer à partir des fonctions usuelles.
Par exemple, $x \mapsto e^{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet des primitives, mais aucune ne peut s'écrire avec des fonctions usuelles....

Proposition 1 :

Soit I un intervalle et soit f une fonction admettant au moins une primitive sur I, alors f admet une infinité de primitives sur I qui diffèrent d'une constante additive.
Plus précisément : si F est une primitive de f, alors

$$G \text{ est une primitive de } f \text{ si et seulement si } \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = F(x) + C$$

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
La fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc une primitive. Elle en admet même une infinité, et celle que l'on appelle ln est l'unique qui s'annule en 1.

Danger ! **PIÈGE :**

Il est important de noter que le théorème parle d'intervalle (bien qu'on puisse en fait parler de primitive pour sur des ensembles quelconques).

Ainsi, les constantes peuvent différer sur les différents intervalles où la fonction est définie, comme on l'a déjà vu pour les dérivées (cf TD : valeur de $\arctan(x) + \arctan(\dfrac{1}{x})$).

2) Intégrales et primitives :

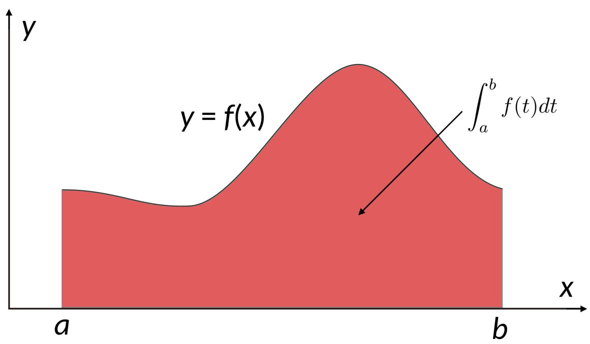
a) Intégrales :

On choisit pour le moment la définition géométrique :

Définition :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, à valeur dans $\mathbb{R}$.

On appelle intégrale de f entre a et b, noté $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$, l'aire algébrique de la zone délimitée entre le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



La notion "d'aire algébrique" signifie qu'on compte positivement l'aire quand f est positive, négativement quand f est négative.

Si on veut la "véritable" aire, on prendra donc $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$.

Le lien avec les primitives se fait via la proposition suivante :

Proposition 2 :
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

▷ *Preuve* : Admis pour le moment.

◁

Remarques :
1. Cette valeur ne dépend pas du choix de la primitive de f :

2. On utilisera la notation $[F(t)]_a^b$ pour dire $F(b) - F(a)$.
3. t est appelée variable d'intégration. Elle est muette et n'existe que dans le signe $\displaystyle\int$.

   Ainsi, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\theta)d\theta$.

Exemple :
- $\displaystyle\int_0^\pi \sin(t)dt =$

Notons enfin les propriétés immédiates ci-dessous :

Propriété 2 :
Soit f continue sur un intervalle I et $a, b, c \in I$.
Alors :
- $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ (relation de Chasles)
- $\displaystyle\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

▷ *Preuve* :

◁

b) Utilisation d'une intégrale pour définir une primitive :

Theorème 2 :
Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Alors la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a (i.e. $F(a) = 0$).

▷ *Preuve* :
On la fera pleinement dans le chapitre consacrée aux intégrales au deuxième semestre, mais on peut déjà en donner cette version :

◁

Exemple :
La fonction $x \to \ln x$ est définie comme étant l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1 :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}dx$$

Remarquons que sur $\mathbb{R}_-$, $x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive de $\dfrac{1}{x}$ et ainsi

$$\boxed{\text{une primitive de } x \to \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ est } x \to \ln(|x|).}$$

Danger ! **PAS TOUTES LES PRIMITIVES !**
Cette formule donne une primitive de la fonction, mais pas toutes. En particulier, ce théorème donne une primitive qui s'annule en un point. Or ce n'est pas forcément toujours le cas. Par exemple exp admet comme primtive elle même, et elle ne s'annule pas.
On ne peut donc pas écrire e^x sous la forme $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$....

NOTATION

Pour désigner une primitive "générique" de f, on utilisera parfois la notation $\displaystyle\int^x f(t)dt$, sans préciser de borne inférieure à l'intégrale.

Cette notation, abusive et source de confusion, est néanmoins pratique....

Exemple :
On pourra écrire $\displaystyle\int^x e^t dt = e^x$, $\displaystyle\int^x \cos(t)dt = \sin(x)$, etc.

3) Dérivation et primitive de fonctions à valeurs complexes

a) Dérivation :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Alors $f(x) = a(x) + ib(x)$ où $a(x) = Re(f(x))$ et $b(x) = Im(f(x))$.

On dit que f est **dérivable** en $x \in I$ si et seulement si a et b sont dérivables en x, et on a alors $f'(x) = a'(x) + ib(x)$

Exemple :
Soit $f(x) = (1+i)x^2 + 3ix - 2$:

Les formules de dérivation classique restent vraies (il suffit, pour les vérifier, de s'intéresser à la partie réelle et la partie complexe).

Proposition 3 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient f et g deux fonctions à valeurs complexes, dérivables sur I. Alors :

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable avec $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g')$.
- La fonction fg est dérivable sur I avec $(fg)' = f'g + fg'$
- La fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable partout où g ne s'annule pas avec $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f^n est dérivable avec $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.

b) Cas particulier : dérivée de $\exp(\varphi)$

Proposition 4 :

Soit φ une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{C}$, dérivable sur I.
Alors la fonction $f = e^{\varphi}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}$$

▷ *Preuve* :

◁

Corolaire 1 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $t \mapsto \lambda e^{\lambda t}$

▷ *Preuve* :

◁

c) Primitives et intégrales de fonction à valeurs complexes

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$.
Alors $f(x) = a(x) + ib(x)$ où $a(x) = Re(f(x))$ et $b(x) = Im(f(x))$.

On dit que $F : I \to \mathbb{C}$ est une **primitive** de f sur I si et seulement si $F'(x) = f(x)$, c'est à dire si et seulement si $Re(F)$ et $Im(F)$ sont des primitives de a et b.

Exemples :

- Soit $f(x) = ix^2 + 3x - 1 + i$. Alors une primitive de f est :
- Soit $f(x) = e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors une primitive de f est :

De la même manière, on va définir l'intégrale d'une fonction complexe :

Définition :

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction, de partie réelle $\alpha : I \to \mathbb{R}$ et de partie imaginaire $\beta : I \to \mathbb{R}$ toutes deux continues.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on définit $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \alpha(t)dt + i\int_a^b \beta(t)dt$$

Autrement dit, $Re(\displaystyle\int_a^b f(t)dt) = \int_a^n Re(f(t))dt$ et $Im(\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Im(f(t))dt$

Toutes les propriétés de l'intégrale "classique" sont conservées : linéarité, Chasles, etc....

Exemple

Calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix}dx$:

Propriété 3 :
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue, admettant F comme primitive.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

Exemple :
A nouveau, calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix}dx$

II Calcul des primitives :

1) Méthode élémentaire : reconnaitre ou faire apparaître des dérivées

a) Principe :

C'est la première chose à essayer : si on reconnait F tel que $F' = f$, alors on a fini...

Exemple :
Une primitive de $x \mapsto 2x$ est

Méthode : FAIRE APPARAITRE UNE FORME CONNUE
Il arrive qu'on aie "presque" la dérivée d'une fonction connue.
Dans ce cas, on multiplie et on divise PAR UNE CONSTANTE pour faire apparaître la forme voulue.

Exemple :
On veut une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$: on reconnait presque la dérivée de $\sin(2x)$. "Presque" parce qu'il manque un 2 en facteur.
Le plus prudent est de le faire apparaître avant de donner la primitive :

FORMULAIRE QUELQUES FONCTIONS À SAVOIR "PRIMITIVER" :

f(x)	une primitive
x^n avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
x^αavec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
e^x	e^x

f(x)	une primitive
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

Il faut également savoir reconnaitre les versions composées :

Formulaire **Quelques "motifs" à reconnaitre :**

Si u est une fonction dérivable :

fonction à intégrer	Primitive (à une constante près)
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{u'}{u^n}$ (avec $n \geq 2$)	$\dfrac{-1}{u^{n-1}} \times \dfrac{1}{n-1}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u'u^\alpha$avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$u'e^u$	e^u
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$
$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin u$
$u'f'(u)$	$f(u)$

b) Exemples :

1. Donnez une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx$:

2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x+1)^2}dx$.

3. Trouver la primitive à $f : x \to \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ qui s'annule en 0.

Astuce... **QUELQUES CONSEILS PRATIQUES**

1. Connaître parfaitement vos dérivées usuelles pour ne pas risquer de confondre... Bien savoir dériver est la clef pour bien savoir "primitiver"...
2. Vérifier rapidement que la primitive que vous avez obtenue a bien pour dérivée ce que vous souhaitez...

c) Passage par les complexes :

Pour trouver une primitive à des fonctions comme $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$, une astuce très pratique est d'utiliser les complexes, où la primitive va être "simple" :

2) Cas particulier des fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

La méthode à employer va dépendre des racines au dénominateur.

a) Cas avec deux racines distinctes

Exemple :

soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$.
Le dénominateur admet deux racines (-1 et 3), donc cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.
On a $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$.

Méthode : **CAS AVEC 2 RACINES DISTINCTES**

Si il existe x_1 et x_2 avec $x_1 \neq x_2$ tels que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, on cherche α et β tels que, pour tout x de l'ensemble de définition,

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{\alpha}{x-x_1} + \frac{\beta}{x-x_2}$$

De tels α et β existent toujours dans ce cas, et il reste à calculer les primitives en utilisant le ln (sans oublier les valeurs absolues)

Remarque :
Cette technique fonctionne aussi avec un numerateur de la forme $Ax + B$, pas seulement avec un constante.

b) Cas avec racine double

Exemple :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+4}$.

On a $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$: la fonction est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, et on a simplement

$$\frac{1}{x^2+4x+4} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

On reconnait donc (presque) la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$, et une primitive est

$$x \mapsto -\frac{1}{x+2}$$

Méthode : **CAS AVEC RACINE DOUBLE**

Si il existe x_0 tel que $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$, on réécrit la fonction sous la forme

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \alpha\frac{1}{(x-x_0)^2}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est en général facile à déterminer.

Une primitive est alors $x \mapsto -\alpha\dfrac{1}{x-x_0}$

Remarque :
Cette technique **ne fonctionne pas** avec un numerateur de la forme $Ax+B$, il faut une constante une numerateur.

c) Cas sans racine réelle

Principe :

on va faire apparaître une forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$, ce qui donnera une fonction en *arctan*...

Exemple :

primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$. Comme x^2-x+1 n'a pas de racine, la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

- **Première étape :** Utiliser la forme canonique pour changer le dénominateur.

- **Deuxième étape :** Faire apparaitre le "$\mathbf{1}+u^2$" :

- **Dernière étape :** Faire apparaitre u' au numérateur :

Proposition 5 : Methode à retenir : cas sans racine réelles

Si ax^2+bx+c n'a pas de racine réelle, on utilise la forme canonique du dénominateur et on factorise par des constantes de façon à faire apparaitre une forme en $\dfrac{u'}{1+u^2}$.
On conclut via la fonction arctan.

3) Intégration par partie :

a) Le théorème

Theorème 3 : formule d'intégration par partie.

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et soit $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

En abrégé : $\int uv' = [uv] - \int u'v$

▷ *Preuve* :

◁

Astuce... **Cas d'utilisation :**

- Si on a une expression sous la forme d'un produit avec un des facteurs qui se simplifie si on le dérive (on pose alors u ce facteur)
- Si on veut une primitive de quelque chose dont on connait la dérivée (on pose alors $v'(t) = 1$)

b) Exemples :

1. Calculez $\int_0^1 xe^x dx$:

2. Donnez une primitive à $x \mapsto \ln x$:

4) Changement de variable

a) Le théorème :

Theorème 4 : changement de variable dans une intégrale

Soit f continue sur un intervalle I et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J tel que $\varphi(J) \subset I$.
Alors pour tout $a, b \in J$,

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable "$u = \varphi(x)$".

▷ *Preuve* :

◁

b) Exemple en pratique : description de la méthode

Soit à calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^{-x} + e^x}dx$ en posant $u = e^x$.

On va appliquer le théorème de changement de variable avec $\varphi : x \mapsto e^x$, qui est bien une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. **Première technique : faire apparaitre** du
   Première étape : Calculer du et préparer l'intégrale :

   Deuxième étape : calcul des bornes : quand $x = a$ que vaut u ? Et quand $x = b$ que vaut u ?

Troisième étape : on remplace tout : il ne doit plus y avoir de x dans l'expression, et les bornes sont changées. Attention : on ne les inverse pas même si à l'arrivée l'ordre peut sembler perturbé...

2. **Deuxième technique : inverser le changement de variable.**
   On veut poser $u = e^x$, donc $x = \ln(u)$.
   Première étape : calculer dx en fonction de du

   Deuxième étape : calcul des bornes : quand $x = a$ que vaut u ? Et quand $x = b$ que vaut u ?

   Troisième étape : on remplace tout !

III Application aux équations différentielles linéaires du premier ordre

1) Généralités.

On étend l'étude faite au chapitre analyse 4 :

a) Type d'équations à résoudre :

Définition :

Soit I un intervalle. On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** d'inconnue y toute équation différentielle de la forme :

$$\forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

où a et b sont des fonctions données, continues sur I.
La fonction inconnue y est une fonction dérivable sur I.

Danger ! NOTATION AMBIGÜE

souvent, on ne précise pas que y est une fonction de x et on écrit simplement :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Définition :

Une fonction f est dite **solution de l'équation différentielle sur l'intervalle** I si et seulement si f est dérivable sur I et, $\forall x \in I$, on a

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

Remarques :
Si f est solution de l'équation, alors $f'(x) = b(x) - a(x)f(x)$.
Par somme et produit de fonction continue, f' est continue, donc les solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sont forcément de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemples :

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x \tag{1}$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre, que l'on peut résoudre sur $I =]0, +\infty[$ et dont une solution est, par exemple, $y : x \mapsto x^2$.
L'équation

$$y' + y^2 = 1 \tag{2}$$

n'est pas une équation différentielle linéaire. On peut néanmoins la résoudre, mais les outils pour le faire ne sont pas au programme cette année.

b) Equation homogène :

Définition :

On dit que l'équation est **homogène** si elle est de la forme

$$y' + \alpha(x)y = 0$$

Exemple :
$y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ est une équation homogène.

Propriété 4 :
Si f et g sont solutions de $(E) : y' + \alpha(x)y = 0$,
alors quels que soient λ et μ réels, $\lambda f + \mu g$ est solution de (E).

▷ *Preuve* :

◁

Remarque : C'est cette propriété qui fait que l'on parle d'équations "linéaires"...
En outre, cela garantie une stabilité par combinaisons linéaires de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle. On parle alors d'**espace vectoriel des solutions.**

c) Espace des solutions :

Theorème 5 :
Soit (E) une équation différentielle à résoudre sur un intervalle I de la forme

$$(E) \qquad y' + a(x)y = b(x).$$

On note (E_h) l'équation homogène associée :

$$(E_h) \qquad y' + a(x)y = 0.$$

Soit y_p une solution de E.
Alors une fonction f est solution de (E) si et seulement si il existe y_h solution de (E_h) telle que pour tout $x \in I$, $f(x) = y_p(x) + y_h(x)$.

Autrement dit : **les solutions de l'équation (E) sont les fonctions qui s'écrivent comme somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.**

▷ *Preuve* :

◁

2) Résolution de l'équation.

⚠ : avant de commencer, ne pas oublier de diviser par les éventuels "parasites" devant y'.
Quitte à résoudre sur plusieurs intervalles, l'équation doit impérativement être mise sur la forme

$$y' + a(x)y = b(x)$$

a) Résolution de l'équation homogène :

Résolution :
Soit l'équation :

$$(E_h) : y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

où a est une fonction continue sur un intervalle I.

Theorème 6 : Solutions de l'équation homogène
Soit a une fonction continue sur un intervalle I. Les solutions sur I de l'équation homogène

$$y' + a(x)y = 0$$

sont toutes les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$$

où A est une primitive de a et λ un réel.

Exemples :
1. $y' - 2xy = 0$

2. $y' = \dfrac{1}{x}y$

Remarques :

- Attention à bien mettre sous la forme $y' + a(x)y = 0$ afin de repérer ce que vaut $a(x)$ (risque d'erreur de signe très forte).
- Que se passe-t-il si on prend une autre primitive ?

- Il s'agit bien d'une généralisation du cas constant : on a vu que l'équation $y' + ay = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$ a pour solution les $y(x) = \lambda e^{-ax}$. Tout se passe comme si "$a(x) = a$", et une primitive est alors $A(x) = ax$: on retrouve bien λe^{-ax}.

b) Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante.

Principe de la méthode :

Soient f et g deux fonctions quelconques définies sur un même domaine D. Alors il existe une fonction h définie sur D telle que pour tout x, $f(x) = h(x)e^{g(x)}$.
En effet, il suffit de prendre

$$h(x) =$$

La méthode de variation de constante consiste à bien choisir la fonction g pour obtenir des solutions particulière à l'équation.
Soit (E) : $y' + a(x)y = b(x)$ une equation différentielle linéaire du premier ordre. On sait que les solutions de l'équation homogène sont de la forme

L'idée est de chercher une solution particulière sous la forme $f(x) =$: on fait "varier" la constante λ.

On a alors $f'(x) =$

Ainsi, f est solution de (E) et seulement si

On en déduit $\lambda(x)$ et donner enfin $f(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$ qui sera une des solutions de (E).

Exemple :
Résoudre sur $\mathbb{R}_+$: $ty' + y = te^t$

3) Remarques sur les solutions particulières.

a) Solutions évidentes :

Avant de se lancer dans une méthode de variation de la constante qui peut être lourde en calcul, rechercher une solution évidente est la première chose à essayer. On pourra donc rapidement tester les solutions constantes, et les fonctions suivantes : $y : x \mapsto x$, $y : x \mapsto x^2$, $y : x \mapsto \cos x$ et $y : x \mapsto \sin x$.

Exemple :
L'équation $y' + \dfrac{\sin x}{\cos x} y = \dfrac{1}{\cos x}$ admet une solution évidente :

b) Principe de superposition des solutions :

Proposition 6 :

Soit l'éqtion

$$(E) : y' + a(x)y = b(x)$$

où la fonction $b(x)$ s'écrit sous la forme

$$b(x) = b_1(x) + b_2(x) + \dots b_n(x)$$

avec chaque fonction b_i continue sur l'intervalle de résolution.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère l'équation

$$(E_i) : y' + a(x)y = b_i(x)$$

et soit y_{p_i} une solution particulière de (E_i).

Alors la fonction $y_{p_1} + y_{p_2} + \dots y_{p_n}$ est une solution particulière de (E).

▷ *Preuve* : c'est une vérification immédiate grâce à la linéarité de la dérivée. ◁

Exemple :
Résoudre sur $\mathbb{R}_+$: $ty' + y = te^t + 1$