Analyse - Chapitre 04

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

I Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants.

1) Généralités.

a) Type d'équations à résoudre :

Définition :

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** et d'inconnue y toute équation de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + ay(x) = b$$

où a et b sont des réels fixés.
L'inconnue y est une fonction qui doit être dérivable sur $\mathbb{R}$.
Fréquemment, on ne précise pas la variable x (ou t, ou...) et on écrit simplement :

$$y' + ay = b$$

Exemples :

- $3y' + 2y = 2$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants (il suffit de diviser par 3 pour revenir à la forme ci dessus).
- $yy' = 1$ n'est pas une équation différentielle linéaire.

Définition :

On dit que **l'équation est homogène** si elle est de la forme

$$y' + ay = 0$$

Par exemple : $y' + 2y = 0$ est homogène et $y' + 2y - 1 = 0$ ne l'est pas...

b) Espace des solutions :

Theorème 1 :

Soient a et b réels et soit (E) une équation différentielle de la forme

$$(E) \qquad y' + ay = b.$$

On note (E_h) l'équation homogène associée :

$$(E_h) \qquad y' + ay = 0.$$

Soit y_p une solution (quelconque) de E.
Alors une fonction y est solution de (E) si et seulement si il existe y_h solution de (E_h) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Autrement dit :
Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions qui s'écrivent comme somme d'une solution particulière (y_p) et d'une solution de l'équation homogène.

▷ *Preuve* :

◁

A noter : "UNE" SOLUTION PARTICULIÈRE, PAS "LA" !

L'énoncer utilise bien article indéfini "une" pour les deux solutions qu'on ajoute. Il faut bien comprendre que n'importe quelle solution de l'équation est une solution "particulière" en soi !
L'astuce sera de chercher des solutions particulières sous une forme astucieuse, mais on gardera bien en tête qu'il y a une **infinité** de solutions.

c) Plan de résolution :

Le théorème précédent nous fournit le plan de résolution :

Plan de résolution d'une equation différentielle linéaire du 1er ordre :

1 : Mettre l'équation sous la forme $y' + ay = b$.

2 : Trouver toutes les solutions de l'équation homogène.

3 : Trouver une solution particulière.

4 : Conclure en faisant la somme.

2) Détails des étapes.

a) Résolution de l'équation homogène :

Theorème 2 :

Les solutions de l'équation homogène $E_h : y' + ay = 0$ sont les fonctions pour lesquelles il existe $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$y : x \mapsto \lambda e^{-ax}.$$

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :

1. (E_1) $y' - 2y = 0$:

2. (E_2) $3y + 2y' = 0$:

b) Recherche de solutions particulières : cas constant

Pour les équations du type $y' + ay = b$ avec a et b **constants**, on cherchera une solution particulière qui est elle même constante.

Exemple :

$$y' - 2y = 3 \qquad (E)$$

c) Recherche de solutions particulières : cas de la trigonométrie

On verra dans quelques semaines comment traiter n'importe quel second membre, mais quand celui ci est une fonction "simple", l'astuce consiste à chercher une solution particulière "du même type" que le second membre.
En particulier si l'équation est de la forme

$$y' + ay = b\cos(\omega x) \text{ ou } y' + ay = b\sin(\omega x)$$

avec a et b réels fixés, on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ avec A et B réels.

Exemple :
Soit l'équation

$$y' + 4y = 2\sin(3x)$$

3) Problème de Cauchy

Définition :

On appelle **problème de Cauchy** toute équation différentielle associée à une "condition initiale", c'est à dire une valeur particulière de la fonction inconnue en un point donnée.

Exemple :

On cherche à résoudre $\left\{ \begin{array}{r} y' - 3y = 2 \\ y(0) = 3 \end{array} \right.$

Ceci est un problème de Cauchy, avec la condition initiale $y(0) = 3$.

Theorème 3 :

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution f au problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{rl} y' + ay & = b \\ y(x_0) & = y_0 \end{array} \right.$$

▷ *Preuve* : La preuve se déduit immédiatement de l'allure des fonctions, toutes de la forme $\lambda e^{-ax} + c$. En remplaçant x par x_0 on obtient une équation simple qui donne un unique λ possible.

◁

Exemple :

Résolvons $\left\{ \begin{array}{r} y' - 3y = 2 \\ y(0) = 3 \end{array} \right.$

II Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

1) Généralités

a) Problématique

On cherche à résoudre des équations du type :

$$(E) : y'' + ay' + by = c$$

où a, b et c sont des constantes réelles.
Le vocabulaire utilisé est le même que celui des équations du premier ordre. En particulier, on dit que l'équation est homogène si $c = 0$.

b) Plan de résolution

De la même façon que pour le premier degré, on peut montrer que les solutions s'écrivent comme somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.
Le plan de résolution sera donc le même que pour les équations du premier ordre :

Plan de résolution d'une equation différentielle linéaire du 2e ordre :

1 : Mettre l'équation sous la forme : $y'' + ay' + by = c$.

2 : Trouver les solutions de l'équation homogène.

3 : Trouver une solution particulière.

4 : Conclure sur les solutions de l'équation de départ.

2) Résolution de l'équation homogène : $y'' + ay' + by = 0$

a) Principe :

Soit y soit une solution de l'équation, c'est à dire que y est dérivable deux fois et vérifie

$$(E) : y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

L'astuce consiste à se ramener aux équations différentielles du premier degré : soit $r \in \mathbb{C}$ (pour l'instant quelconque), et écrivons :

$$y(x) = \lambda(x)e^{rx} \text{ avec } \lambda(x) = \frac{y(x)}{e^{rx}}$$

La fonction λ est dérivable deux fois (par quotient de fonctions dérivables), et il vient :

$$y'(x) = \lambda'(x)e^{rx} + r\lambda(x)e^{rx}$$

D'où :

$$\begin{aligned} y''(x) &= \lambda''(x)e^{rx} + r\lambda'(x)e^{rx} + r\lambda'e^{rx} + r^2\lambda(x)e^{rx} \\ &= e^{rx}(\lambda'' + 2r\lambda' + r^2\lambda^2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution } &\Leftrightarrow y'' + ay' + by = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{rx}(\lambda'' + 2r\lambda' + r^2\lambda) + ae^{rx}(\lambda' + r\lambda) + be^{rx}\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{rx}(\lambda'' + \lambda'(2r + a) + \lambda(r^2 + ar + b)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda'' + \lambda'(2r + a) + \lambda(r^2 + ar + b) = 0 \end{aligned}$$

La suite consiste à bien choisir le nombre r....

Définition :

On appelle **équation caractéristique** associée à l'équation $y'' + ay' + by = 0$ l'équation

$$r^2 + ar + b = 0$$

b) Premier cas : l'équation caractéristique a deux solutions réelles r_1 et r_2

Les deux solutions sont $r_1 = \dfrac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$.
Prenons $r = r_1$, donc $y(x) = \lambda(x)e^{r_1 x}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} y \text{ est solution } &\Leftrightarrow \lambda'' + \lambda'(2r_1 + a) + \lambda\underbrace{(r_1^2 + ar_1 + b)}_{=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda'' + \lambda'\underbrace{(2r_1 + a)}_{=\sqrt{\Delta}} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, λ' est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 suivante

$$(E') : y' + (2r_1 + a)y = 0$$

On résout cette équation :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution } de(E) &\Leftrightarrow \lambda' \text{ est solution de } (E') \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\lambda'(x) = Ce^{-\sqrt{\Delta}x} \\ &\Leftrightarrow \exists (C, D) \in \mathbb{R}^2/\lambda(x) = \underbrace{-\frac{C}{\sqrt{\Delta}}}_{=B} e^{-\sqrt{\Delta}x} + \underbrace{D}_{=A} \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}/y(x) = Be^{(-\sqrt{\Delta}+r_1)x} + Ae^{r_1 x} \end{aligned}$$

Or $r_1 - \sqrt{\Delta} = \dfrac{-a+\sqrt{\Delta}}{2} - \sqrt{\Delta} = \dfrac{-a-\sqrt{\Delta}}{2} = r_2$
Conclusion :

$$\boxed{y \text{ est solution } \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}/y : x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}}$$

c) Second cas : une racine double

Le calcul est identique, sauf que cette fois $\sqrt{\Delta} = 0$ et cela donne, en notant r cette racine double, :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution } &\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}/\lambda'(x) = A \\ &\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2/\lambda(x) = Ax + B \\ &\Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}/y(x) = (Ax + B)e^{rx} \end{aligned}$$

d) Dernier cas : deux racines complexes

Ce cas est nettement plus technique. On se présente ici que les grandes lignes.
On rappelle déjà les définitions suivantes, qui sont précisées dans les chapitres sur les complexes :

Définition :

pour tout $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, on définit $e^z = e^\alpha e^{i\beta} = e^\alpha(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$

Propriété 1 :

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la fonction $\begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{zx} \end{array}$ est dérivable de dérivée $x \mapsto ze^{zx}$

Avec ces outils, on fait le même calcul que pour les racines réelles, et on a :

$$y \text{ est solution } \Leftrightarrow \exists C, D \in \mathbb{C}, y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

avec $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique (qu'on calcule avec le discriminant...)
Comme les solutions cherchées doivent être des fonctions à valeurs réelles, on a $\bar{y} = y$ et on peut montrer que $C = \bar{D}$ (c'est un système à résoudre un peu long...)
A nouveau en regroupant astucieusement on arrive à

$$\boxed{y \text{ est solution } \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}/y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))}$$

3) Bilan :

a) Solutions de l'équation homogène :

Le théorème ci dessous sera utilisé directement, sans avoir à refaire tout le raisonnement de la section précédente.

Theorème 4 :

Soit $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$ à résoudre sur $\mathbb{R}$.
Soit (E_c) l'équation caractéristique associée :

$$(E_c) : r^2 + ar + b = 0$$

Les solutions de l'équation (E_h) dépendent des solutions de (E_c) :

— **Si E_c admet deux racines réelles r_1 et r_2 :**
y est solution de (E_h) si et seulement si

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

— **Si E_c admet une racine double r :**
y est solution de (E_h) si et seulement si

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (Ax + B)e^{rx}$$

— **Si E_c admet deux racines complexes conjuguées de forme algébrique $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$:**
y est solution de (E_h) si et seulement si

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^{\alpha x} \left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)\right)$$

b) Recherche de solutions particulières :

Comme pour le premier degré, on cherchera une **solution particulière constante si le second membre est constant**, du "meme type" que le second membre si celui-ci est une fonction.
On rencontrera donc essentiellement 4 cas :

Méthode : SECOND MEMBRE NON CONSTANT : SECOND DEGRÉ

- si $y'' + ay' + by = c$ où c est une constante, on cherche une solution particulière constante.
- $y'' + ay' + by = c\cos(\omega x)$ (ou $c \sin(\omega x)$ ou la somme de deux termes de ce genre) : on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$ avec λ et μ réels à déterminer.
- $y'' + ay' + by = P(x)$, avec $b \neq 0$, où P est un polynôme : on cherche les solutions sous la forme d'un polynôme $y_p(x) = Q(x)$ de même degré que P.
- Si $y'' + ay' + by = P(x)e^{mx}$ avec $m \in \mathbb{R}$ et P un polynôme, cela va dépendre de m :
  (a) si m n'est pas racine de l'équation caractéristiques, on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = Q(x)e^{mx}$ où Q est un polynôme de même degré que P.
  (b) si m est racine simple de l'équation caractéristiques, on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = xQ(x)e^{mx}$ où Q est un polynôme de même degré que P.
  (c) si m est racine double de l'équation caractéristiques, on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = x^2Q(x)e^{mx}$ où Q est un polynôme de même degré que P.

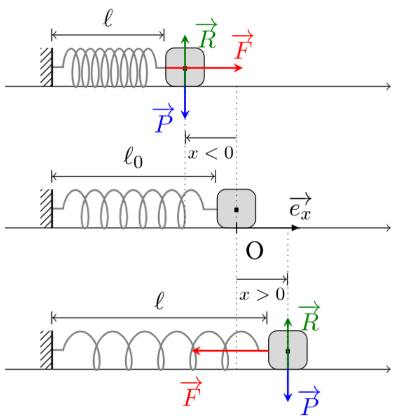
  Notez que cela inclus le cas e^{mx} tout seul, sans polynôme "visible" devant : c'est le cas où P est la constante égale à 1. On cherchera donc Q constant, c'est à dire $y_p = \lambda e^{mx}$, ou $y_p = \lambda x e^{mx}$ ou $y_p = \lambda x^2 e^{mx}$ selon si m est racine ou pas de E_c, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ à déterminer.

Exemples :

1. Considérons l'équation :

$$(E_1) \quad y'' - y' - 2y = 3$$

2. On considère un ressort qui exerce sur un solide de masse m une force opposée et proportionnelle à son allongement :



On a choisi ici comme axe des abscisses l'axe sur lequel agit notre ressort, de sorte que l'on a un système en une seule dimension. La force exercée par le ressort est donc

$$\vec{F} = -k\vec{x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}_+^*$$

On suppose enfin qu'il n'y a pas de force de frottement.

En appliquant la seconde loi de Newton $\left(\sum \vec{F_{ext}} = m\vec{a}\right)$, on obtient

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a},$$

ce qui donne, en considérant uniquement l'axe Ox :

$$m\ddot{x} = -kx$$

En posant $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, on obtient que x est solution de l'équation différentielle :

$$y'' + \omega_0^2 y = 0$$

3. Considérons maintenant le problème de Cauchy ci dessous :

$$(E_2) \quad y'' - 2y' + 2y = 2e^x \text{ avec } y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1$$

Remarque : dans ce problème de Cauchy, on a cette fois deux conditions initiales. Elles correspondent en physique, à la donnée de position initiale $(y(0))$ et de la vitesse initiale $(y'(0))$.