

ÉTUDE D'UN CRASH TEST

On s'intéresse dans ce problème à un crash-test de voiture, et l'on cherche à évaluer les forces et les accélérations mises en jeu sur le corps humain lors d'un accident.

Il existe différents types de crash-tests (frontal, latéral etc...). Pour notre étude mécanique, nous considérerons que la voiture entre en collision avec un mur infiniment rigide (ce qui permet aussi de modéliser un choc frontal entre deux voitures de gabarits comparables). On notera $\vec{v}_0$ le vecteur vitesse juste avant la collision et $v_0 = 64 \text{ km/h}$ sa norme.



FIGURE 1 – Un véhicule avant et après un crash-test

Le système étudié, supposé indéformable, sera le conducteur de masse $m = 80 \text{ kg}$. La réaction de la voiture sera modélisée par deux forces : une force verticale, notée $\vec{R}$, s'opposant au poids et une force horizontale, notée $\vec{F}$, qui résulte essentiellement de l'action de la ceinture de sécurité sur le conducteur lors du choc. On supposera que le mouvement du système est purement horizontal.

La force $\vec{F}$ est de norme inconnue, supposée constante, et on souhaite estimer la valeur de $F = \vec{F}$ à l'aide des photographies ci-dessus.

Le référentiel terrestre choisi pour cette étude a pour origine O le centre de gravité du conducteur au début de la collision. On choisira l'axe Ox horizontal dirigé et orienté comme le vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$, l'axe Oz vertical vers le haut, et l'axe Oy perpendiculaire aux deux précédents. L'instant initial $t = 0$ correspond au début du choc : la voiture entre en contact avec le mur. On prendra pour l'intensité de la pesanteur la valeur $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

1. Faire un schéma sur lequel vous représenterez le système, les forces qu'il subit, ainsi que sa vitesse initiale.
2. Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$ en fonction des données du problème et des vecteurs de la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
3. En déduire l'expression de $v_x(t)$, la projection de la vitesse selon x en fonction du temps.
4. Déterminer l'expression de $x(t)$.
5. Déduire des questions précédentes le temps τ nécessaire au système pour s'arrêter complètement, en fonction des données du problème $v_0, F, m, \dots$.
6. Exprimer alors la distance d'arrêt d que le système parcourt lors du choc.
7. La voiture représentée sur la photographie figure 1 page 1 a pour dimensions, d'après son constructeur : 3,58 m de long, 1,63 m de large et 1,49 m de haut. Estimer la valeur numérique de d à l'aide des photographies. Expliquer en détail la démarche suivie.
8. Déduire des questions précédentes l'expression de F en fonction de m, v_0 et d . Faire l'application numérique. Quelle serait la masse¹ dont le poids aurait la même intensité que $\vec{F}$?

1. Les intensités de forces sont parfois données en "kg", ce qui n'est bien entendu pas une unité de force, mais représente la masse qui, posée sur l'objet, exercerait une force de même intensité.

9. Déterminer l'accélération subie par le conducteur lors du choc. Comparer avec le record d'accélération auquel s'est volontairement soumis le médecin John Stapp² : 453 m/s^2 .

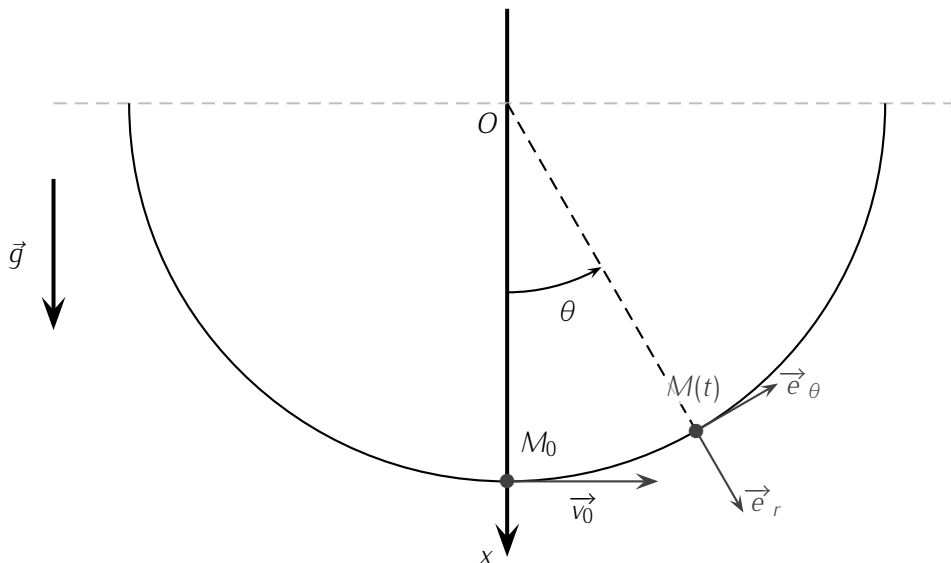
Question d'interprétation

10. Dans l'intérêt des passagers, a-t-on intérêt à rendre les voitures plus solides (moins déformables) ? Justifier votre réponse à l'aide des résultats précédents.

2. Ce médecin s'intéressait aux conséquences pour le corps humain d'une violente accélération lors de l'éjection d'un pilote de chasse depuis un avion supersonique. Il s'est volontairement infligé de violentes accélérations dans différentes positions afin de déterminer comment protéger au mieux les pilotes. Ces expériences n'ont pas été sans conséquences puisque son corps a subi un certain nombre de lésions.

MOUVEMENT PENDULAIRE AMORTI

Un petit objet assimilé à un point matériel M , de masse m , peut glisser sans frottement le long d'un rail ayant la forme d'un demi-cercle de centre O et de rayon R , placé dans un plan vertical.



On repère la position du point M à l'instant t par l'angle $\theta(t) = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM(t)})$.

À l'instant $t = 0$, l'objet est lancé du point M_0 avec une vitesse $\vec{v}_0$.

Dans tout le problème, on utilisera une base de projection polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On prendra pour valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

- Q1 1. Faire l'inventaire des forces appliquées à M , et les représenter sur un schéma clair lorsque le point est dans une position $M(t)$ quelconque. On précisera les composantes de ces forces sur la base polaire.
- Q2 2. Exprimer l'accélération de M dans la base polaire. Justifier.
- Q3 3. En déduire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $\theta(t)$.
- Q4 4. On suppose que la norme v_0 du vecteur vitesse initial est suffisamment faible pour que la condition $\theta(t) \ll 1 \text{ rad}$ soit satisfaite à chaque instant. Déterminer complètement l'expression de $\theta(t)$ dans cette hypothèse en fonction de v_0 , g , R et t .

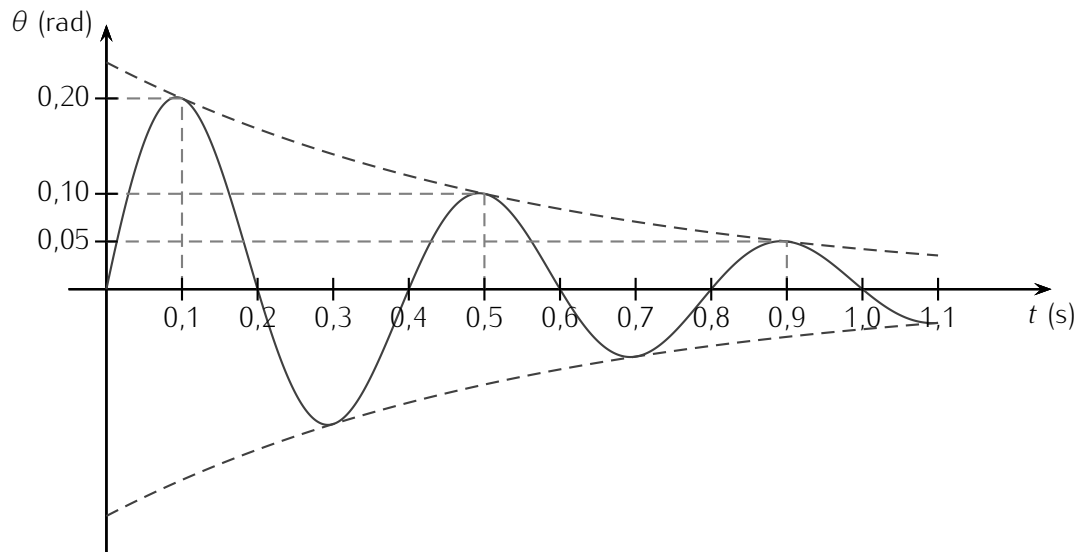
On suppose à partir de maintenant que le point M subit au cours de son mouvement une force de frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$, où λ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du point M à l'instant t . La condition $\theta(t) \ll 1 \text{ rad}$ reste également satisfaite à chaque instant.

- Q5 5. Établir la nouvelle équation différentielle satisfaite par la fonction $\theta(t)$.
- Q6 6. Les grandeurs m , g et R étant fixées, donner la condition portant sur λ pour que le mouvement soit pseudo-périodique.
- Q7 7. Cette condition étant réalisée, exprimer $\theta(t)$ sous la forme :

$$\theta(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin(\Omega t)$$

On justifiera soigneusement l'établissement de cette relation et on exprimera A , τ et Ω en fonction de v_0 , m , g , R et λ .

8. L'allure de la courbe représentative des variations de la fonction $\theta(t)$ est donnée ci-dessous.



On appelle décrément logarithmique la grandeur sans dimension

$$\delta = \ln \left(\frac{\theta(t)}{\theta(t + T)} \right)$$

où T est la pseudo-période et t le temps.

- Q8 (a) Exprimer λ en fonction de δ , m et T .
- Q9 (b) Par lecture graphique, déterminer la valeur de T .
- Q10 (c) Par lecture graphique, déterminer la valeur de δ .
- Q11 (d) En déduire la valeur de λ (sans omettre de préciser son unité), sachant que $m = 100$ g.
- Q12 (e) Tracer l'allure de la trajectoire de phase correspondant à la courbe ci-dessus (on se restreindra à la même plage temporelle).