Corrigé du DM6 (réduction)

Problème 1 : *D'après CCINP MP 2019*
1. Soit A et B deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Par définition, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.
On a alors :
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\big((PB)P^{-1}\big) = \mathrm{tr}\big(P^{-1}(PB)\big) = \mathrm{tr}(B).$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\big(PBP^{-1}\big) = \det(P) \times \det(B) \times \det(P^{-1})\\ &= \det(P) \times \det(B) \times \frac{1}{\det(P)} = \det(B).\end{aligned}$$

Multiplier une matrice (à gauche ou à droite) par une matrice inversible ne change pas son rang. Comme P et P^{-1} sont inversibles, on a :
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(PBP^{-1}) = \mathrm{rg}(BP^{-1}) = \mathrm{rg}(B).$$

Soit $x \in \mathbb{K}$. On a par définition $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.
On a $xI_n - A = xPP^{-1} - PBP^{-1} = P(xI_n - B)P^{-1}$ donc les matrices $xI_n - A$ et $xI_n - B$ sont semblables donc elles ont même déterminant.
On a donc $\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \det(xI_n - B) = \chi_B(x)$.
Ainsi :

deux matrices semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

2.(a) On a $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2 + 2 = 5$ et $\mathrm{tr}(B) = 1 + 2 + 2 = 5$.
Comme les matrices A et B sont triangulaires, on a $\det(A) = 1 \times 2 \times 2 = \det(B)$.
Les matrices A et B sont inversibles car leur déterminant est non nul.
Leur rang est donc maximal c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A) = 3 = \mathrm{rg}(B)$.
Comme les matrices A et B sont triangulaires, on a $\chi_A = \chi_B = (X - 1)(X - 2)^2$.

Les matrices A et B ont la même trace, le même déterminant, le même rang et le même polynôme caractéristique.

2.(b) Les matrices A et B ont un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$.
Elles seront diagonalisables si et seulement si pour chaque valeur propre, la dimension du sous-espace propre est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre.
On sait que c'est nécessairement le cas pour la valeur propre 1 car il s'agit d'une valeur propre simple.
Déterminons la dimension des sous-espaces propres de A et B associés à la valeur propre 2.
On a :
$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice $A - 2I_3$ est de rang 1 (car elle a une seule ligne non nulle) donc par le théorème du rang :
$$\dim\big(E_2(A)\big) = 3 - 1 = 2 = m_2(A).$$
On en déduit que :
$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

En revanche, $B-2I_3$ est de rang 2 (car elle a deux colonnes non colinéaires et une colonne nulle) donc $\dim\big(E_2(B)\big)=3-2=1\neq m_2(B)$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice } B \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

2.(c) Par l'absurde : supposons que A et B sont semblables.
Comme A est diagonalisable, A est semblable à une matrice diagonale D.
La matrice B est semblable à la matrice A et la matrice A est semblable à la matrice D donc par transitivité, la matrice B est semblable à la matrice D, qui est diagonale, donc B est diagonalisable, ce qui est absurde.
Ainsi :

$$\boxed{\text{les matrices } A \text{ et } B \text{ ne sont pas semblables dans } \mathbb{R}.}$$

2.(d) Pour deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avoir la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique, $\boxed{\text{est une condition nécessaire}}$ pour être semblable d'après la question 1 mais $\boxed{\text{n'est pas une condition suffisante}}$ pour être semblable d'après les questions 2.(a) et 2.(c) (les matrices A et B fournissent un contre-exemple).

3.(a) Calculons le polynôme caractéristique de A.

$$\chi_A=\begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ -2 & -1 & X \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ X^2-2 & -X-1 & 0 \end{vmatrix}=+(-1)\begin{vmatrix} -1 & X \\ X^2-2 & -(X+1) \end{vmatrix}$$
$$=-[(X+1)-X(X^2-2)]=X^3-3X-1.$$

Pour calculer χ_B, on échange les 2 premières colonnes, puis les 2 premières lignes du déterminant :

$$\chi_B=\begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -1 \\ -1 & -2 & X \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & X & 0 \\ X & -1 & -1 \\ -2 & -1 & X \end{vmatrix}=+\begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -1 & X & 0 \\ -2 & -1 & X \end{vmatrix}=\chi_A.$$

On a donc :

$$\boxed{\chi_A=\chi_B=X^3-3X-1.}$$

Étudions les variations de la fonction $x\mapsto\chi_A(x)$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction χ_A est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\chi_A'(x)=3x^2-3=3(x^2-1) \text{ du signe de } x^2-1.$$

On en déduit que χ_A est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$, strictement décroissante sur $[-1,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\chi_A(x)=-\infty<0$ et $\chi_A(-1)=1>0$ et la fonction χ_A est continue sur $]-\infty,-1]$. Par le théorème de la bijection monotone, on en déduit que χ_A s'annule une et une seule fois sur $]-\infty,-1[$, en un réel que l'on note α.
On a $\chi_A(-1)=1>0$ et $\chi_A(1)=-3<0$ donc en raisonnant de même sur $[-1,1]$, on établit que χ_A s'annule une et une seule fois sur $]-1,1[$, en un réel que l'on note β.
On a $\chi_A(1)=-3<0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\chi_A(x)=+\infty>0$ donc de même, χ_A s'annule une et une seule fois sur $]1,+\infty[$, en un réel que l'on note γ.

$$\boxed{\text{Le polynôme } \chi_A \text{ admet donc trois racines réelles } \alpha<\beta<\gamma.}$$

3.(b) Le polynôme caractéristique de A et de B est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples donc les matrices A et B sont diagonalisables. Plus précisémenent, les matrices A et B sont toutes les deux semblables

à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.
Par transitivité, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les matrices } A \text{ et } B \text{ sont semblables.}}$$

4.(a) Notons C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de A.
Comme $C_1 = C_3$ et $C_2 = C_4$, le rang de A est inférieur ou égal à 2.
De plus, C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires car si elles l'étaient, les vecteurs $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ le seraient également donc le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix}$ serait nul. Or, il vaut $\alpha^2 - \beta^2$ et il est non nul car α et β ne sont ni égaux, ni opposés.
On en déduit que $\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2.}$
Comme $\mathrm{rg}(A - 0I_4) < 4$, 0 est une valeur propre de A et par le théorème du rang, on a :

$$\dim(E_0) = 4 - \mathrm{rg}(A) = 4 - 2 = 2.$$

$$\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } A \text{ et } \dim(E_0) = 2.}$$

4.(b) On remarque que $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \begin{pmatrix} 2(\alpha+\beta) \\ 2(\alpha+\beta) \\ 2(\alpha+\beta) \\ 2(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$.

On en déduit que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(\alpha+\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{4,1}$.
Ainsi :

$$\boxed{2(\alpha+\beta) \text{ est une valeur propre de } A \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en est un vecteur propre associé.}}$$

4.(c) On a $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2(\alpha-\beta) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{4,1}$.
Ainsi :

$$\boxed{2(\alpha-\beta) \text{ est une valeur propre de } A \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en est un vecteur propre associé.}}$$

4.(d) On a déjà déterminé que 0, $2(\alpha+\beta)$ et $2(\alpha-\beta)$ sont des valeurs propres de A.
Elles sont de plus toutes distinctes car α et β sont non opposés, différents et $\beta \neq 0$.
Comme $\dim(E_0) = 2$, $\dim(E_{2(\alpha+\beta)}) \geqslant 1$ et $\dim(E_{2(\alpha-\beta)}) \geqslant 1$, on en déduit que :

$$\dim(E_0) + \dim(E_{2(\alpha+\beta)}) + \dim(E_{2(\alpha-\beta)}) \geqslant 4.$$

Comme la matrice A est de taille 4, on sait que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres ne peut pas dépasser 4 donc $\dim(E_0) + \dim(E_{2(\alpha+\beta)}) + \dim(E_{2(\alpha-\beta)}) = 4$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

On a de plus $\dim(E_{2(\alpha+\beta)}) = 1$ et $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre (car constituée d'un seul vecteur non nul) de $E_{2(\alpha+\beta)}$, de cardinal $1 = \dim(E_{2(\alpha+\beta)})$, donc c'est une base de $E_{2(\alpha+\beta)}$.

De même, on montre que $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{2(\alpha-\beta)}$.

On constate enfin que $A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = 0_{4,1}$ et $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = 0_{4,1}$ donc $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre (car constituée de 2 vecteurs non colinéaires) de E_0, de cardinal $2 = \dim(E_0)$ donc c'est une base de E_0.

Comme A est diagonalisable, on a $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C}) = E_{2(\alpha+\beta)} \oplus E_{2(\alpha-\beta)} \oplus E_0$ et donc $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ (adaptée à cette décomposition), formée de vecteurs propres de A.

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de vecteurs propres de } A.}$$

4.(e) On note φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à A.
On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{C})$.

Ainsi, φ a pour matrice A dans la base $\mathscr{C}$ et pour matrice $D = \begin{pmatrix}2(\alpha+\beta) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2(\alpha-\beta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$ (car le premier vecteur de $\mathscr{B}$ appartient à $E_{2(\alpha+\beta)}$, le second à $E_{2(\alpha-\beta)}$ et les deux derniers à E_0).

Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$ c'est-à-dire $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Comme P est une matrice de passage, elle est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la $\mathscr{B}$ à la base canonique.
Par les relations de changement de base, on a alors :

$$Mat_{\mathscr{C}}(\varphi) = PMat_{\mathscr{B}}P^{-1} \text{ c'est-à-dire } A = PDP^{-1}.$$

$$\boxed{\text{En notant } P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}2(\alpha+\beta) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2(\alpha-\beta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ on a } A = PDP^{-1}.}$$

5.(a) Comme $\mathrm{rg}(A) = 1$, on a aussi $\mathrm{rg}(u) = 1$.
Par le théorème du rang, on a donc $\dim(\ker(u)) = n - \mathrm{rg}(u) = n - 1$.
Soit $\mathscr{B} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ adaptée au sous-espace vectoriel $\ker(u)$ c'est-à-dire telle que $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est une base de $\ker(u)$.
On a pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $u(x_j) = 0_{\mathbb{K}^n}$ puisque $x_j \in \ker(u)$.

On en déduit que la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad \text{où } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}.$$

Comme A et M représentent un même endormorphisme u dans deux bases (l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et dans la base $\mathscr{B}$), on en déduit que :

$$\boxed{\text{les matrices } A \text{ et } M \text{ sont semblables.}}$$

5.(b) La question précédente a montré l'existence d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice M comme ci-dessus telles que $A = PMP^{-1}$.
On a alors :

$$\begin{aligned} A^2 = (PMP^{-1})^2 = PM^2P^{-1} = P &\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1a_n \\ 0 & \cdots & 0 & a_2a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^2 \end{pmatrix} P^{-1} \\ = P\big(a_nM\big)P^{-1} = a_nPMP^{-1} = a_nA. \end{aligned}$$

Mais puisque A et M sont semblables, on a $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(M) = a_n$.
On a donc démontré que :

$$\boxed{A^2 = \mathrm{tr}(A).A.}$$

5.(c) Puisque A et M sont semblables, on a :

$$\chi_A = \chi_M = \det(XI_n - M) = X^{n-1}(X - a_n) = X^{n-1}\big(X - \mathrm{tr}(A)\big).$$

$$\boxed{\chi_A = X^{n-1}\big(X - \mathrm{tr}(A)\big).}$$

5.(d) $\star$ Par la question précédente, on a $\chi_A = X^{n-1}\big(X - \mathrm{tr}(A)\big)$.
Comme les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, on obtient $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \mathrm{tr}(A)\}$.
On en déduit que A admet une valeur propre non nulle si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.
On a donc prouvé $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.
$\star$ On suppose que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.
Comme $A^2 - \mathrm{tr}(A)A = 0_n$, $X^2 - \mathrm{tr}(A)X = X(X - \mathrm{tr}(A))$ est un polynôme annulateur de A, scindé à racines simples.
On en déduit que A est diagonalisable.
On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 0$.
D'après la question 5.(c), on a alors $\chi_A = X^n$ donc 0 est une valeur de propre de A de multiplicité n.
Comme $\mathrm{rg}(A) = 1$, on a par le théorème du rang : $\dim(E_0) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$.
Comme $\dim(E_0) \neq m_0$, on en déduit que la matrice A n'est pas diagonalisable.
On a donc prouvé $(i) \Leftrightarrow (iii)$.
$\star$ On a par la question 5.(b) :

$$A^2 = 0_n \Leftrightarrow \mathrm{tr}(A)A = 0_n \Leftrightarrow \mathrm{tr}(A) = 0 \text{ car } A \neq 0_n \text{ puisque } \mathrm{rg}(A) = 1.$$

On a donc prouvé $(iii) \Leftrightarrow (iv)$.
Ainsi :

$$\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv).}$$

6.(a) La matrice $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \text{ convient}}$ car $A \neq 0_2$, $\mathrm{tr}(A) = 1 - 1 = 0$, $\det(A) = 1 \times (-1) - i^2 = 0$ et A est symétrique.
6.(b) Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2.$$

On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
Si la matrice A était diagonalisable alors elle serait semblable à la matrice nulle et donc égale à la matrice nulle.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$$

6.(c) Si une telle matrice A existait, étant symétrique à cœfficients réels, elle serait diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donc semblable à la matrice nulle (car on aurait aussi $\chi_A = X^2$) et donc égale à la matrice nulle.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de matrice de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ non nulle, symétrique, de trace nulle et de déterminant nul.}}$$

7. $\star$ On suppose que les matrices A et B sont semblables.
Elles ont donc le même polynôme caractéristique.
Or, $\chi_A = (X-\lambda)^2$ et $\chi_B = (X-\mu)^2$ (car A et B sont triangulaires) d'où nécessairement, $\lambda = \mu$.
De plus, si on avait $a = 0$ alors la matrice A serait diagonale. La matrice B étant semblable à la matrice A, elle serait diagonalisable. On sait alors que le polynôme $\prod\limits_{\alpha \in \mathrm{Sp}(B)} (X-\alpha) = X - \mu$ serait annulateur de B donc on aurait $B - \mu I_2 = 0_2$ d'où $B = \mu I_2$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, $a \neq 0$.
$\star$ On suppose que $\lambda = \mu$ et $a \neq 0$.
On note φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à A.
Notons $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.
On a $\varphi(e_1) = \lambda e_1$ et $\varphi(e_2) = a e_1 + \lambda e_2$.
Posons $u_1 = a e_1$.
La famille $\mathscr{B} = (u_1, e_2) = \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ car c'est une famille libre (puisque constituée de deux vecteurs non colinéaires car $a \neq 0$) et de cardinal $2 = \dim(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C}))$.
On a $\varphi(u_1) = a\varphi(e_1) = a\lambda e_1 = \lambda u_1$ et $\varphi(e_2) = u_1 + \lambda e_2$.
On en déduit que la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est B.
Comme A et B représentent un même endomorphisme dans deux bases, elles sont semblables.
Ainsi :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables si et seulement si } \lambda = \mu \text{ et } a \neq 0.}$$

8.(a) Puisque $A = PBP^{-1}$, on a en multipliant à droite par P :

$$AP = PB \text{ donc } A(R+iS) = (R+iS)B \text{ donc } AR + iAS = RB + iSB.$$

Comme les matrices AR et AS sont à coefficients réels, en prenant la partie réelle de chaque cœfficient de la matrice $AR + iAS$, on obtient :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{Re}([AR+iAS]_{k,\ell}) = \mathrm{Re}([AR]_{k,\ell} + i[AS]_{k,\ell}) = [AR]_{k,\ell}.$$

Comme RB et SB sont à cœfficients réels, on a de même :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{Re}([RB+iSB]_{k,\ell}) = [RB]_{k,\ell}.$$

On en déduit que pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $[AR]_{k,\ell} = [RB]_{k,\ell}$ d'où $AR = RB$.
En raisonnant de même avec la partie imaginaire, on trouve $AS = SB$.
Ainsi :

$$\boxed{RB = AR \text{ et } SB = AS.}$$

8.(b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{H}(n)$ « pour toutes matrices C et D de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $\varphi : x \in \mathbb{C} \mapsto \det(C + xD)$ est polynômiale. »
Initialisation.
Pour $n = 1$, les matrices C et D s'écrivent cI_1 et dI_1.
Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a $\varphi(x) = \det(cI_1 + xdI_1) = \det\big((c+dx)I_1\big) = c + dx$.
L'application φ est une fonction affine donc polynômiale.

Hérédité.
Soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathscr{H}(n)$ soit vraie. Montrons $\mathscr{H}(n+1)$.
Prenons $C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ et $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ dans $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
Pour tout $x \in \mathbb{C}$, calculons $\varphi(x)$ en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \det(C + xD)\\ &= \begin{vmatrix} c_{1,1} + d_{1,1}x & \cdots & c_{1,n} + d_{1,n}x & c_{1,n+1} + d_{1,n+1}x \\ c_{2,1} + d_{2,1}x & \cdots & c_{2,n} + d_{2,n}x & c_{2,n+1} + d_{2,n+1}x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{n+1,1} + d_{n+1,1}x & \cdots & c_{n+1,n} + d_{n+1,n}x & c_{n+1,n+1} + d_{n+1,n+1}x \end{vmatrix}_{(n+1)}\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i}(c_{i,n+1} + d_{i,n+1}x)\Delta_i(x), \qquad (\star)\end{aligned}$$

en posant :

$$\Delta_i(x) = \begin{vmatrix} c_{1,1} + d_{1,1}x & \cdots & c_{1,n} + d_{1,n}x \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i-1,1} + d_{n+1,1}x & \cdots & c_{i-1,n} + d_{i-1,n}x \\ c_{i+1,1} + d_{i+1,1}x & \vdots & c_{i+1,n} + d_{i+1,n}x \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+1,1} + d_{n+1,1}?x & \cdots & c_{n+1,n} + d_{n+1,n}x \end{vmatrix}_{(n)}$$

Remarquons que les $\Delta_i(x)$ s'écrivent $\det(C_i + xD_i)$, où les matrices C_i et D_i sont obtenues en supprimant la ligne i et la colonne $(n+1)$ des matrices C et D.
Par $\mathscr{H}(n)$, les fonctions Δ_i sont polynomiales, l'écriture $(\star)$ indique que φ également.
Ainsi, $\mathscr{H}(n+1)$ est démontrée.
On en déduit que la propriété $\mathscr{H}(n)$ est démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En particulier, l'application $\varphi : x \in \mathbb{C} \mapsto \det(R + xS)$ est polynomiale.
De plus, $\varphi(i) = \det(R + iS) = \det(P) \neq 0$ puisque la matrice P est inversible.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } x \in \mathbb{C} \mapsto \det(R + xS) \text{ est une fonction polynomiale non identiquement nulle.}}$$

8.(c) Raisonnons par l'absurde. On suppose que pour tout réel x, la matrice $R+xS$ n'est pas inversible.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\det(R + xS) = 0$.
Ainsi, la fonction polynômiale $x \in \mathbb{C} \mapsto \det(R + xS)$ admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul, ce qui contredit le résultat de la question précédente.
On en déduit qu' :

$$\boxed{\text{il existe } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } R + x_0 S \text{ soit inversible.}}$$

8.(d) D'après la question 8.(a), on a $RB + x_0SB = AR + x_0AS$ donc $(R + x_0S)B = A(R + x_0S)$.
Notons $Q = R + x_0S$. Cette matrice est à cœfficients réels et elle est inversible.
On a $QB = AQ$ donc $A = QBQ^{-1}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{les matrices } A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

8.(e) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour polynôme caractéristique $\chi_A = X^3 + X$.
Comme $\chi_A = X(X^2 + 1) = X(X - i)(X + i)$, le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et donc A est semblable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$.
Par ailleurs, en développant $\chi_R = \det(XI_3 - R)$ par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\chi_R = X(X^2 + 1) = \chi_A.$$

Comme pour A, on en déduit que R est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et semblable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ à D.
Par transitivité, on en déduit que A et R sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ (car elles sont semblables à la même matrice).
Comme A et R sont deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on en déduit par la question 8.(d) qu'elles sont semblables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ ayant pour polynôme caractéristique } X^3+X \text{ est semblable à la matrice } R.}$$

Problème 2 : *D'après Centrale PSI 2020*
Q1. On a $|1+z|^2 = (1+z)\overline{(1+z)} = (1+z)(1+\overline{z}) = 1+z+\overline{z}+z\overline{z} = 1+2\mathrm{Re}(z)+|z|^2$ et $(1+|z|)^2 = 1+|z|^2+2|z|$.
On en déduit que $\mathrm{Re}(z) = |z|$.
Notons $z = a+ib$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Ainsi, $a = \sqrt{a^2+b^2}$ donc $a \geqslant 0$ et $a^2 = a^2+b^2$ d'où $b = 0$.
On a donc $z = a \in \mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{Si } z\in\mathbb{C} \text{ vérifie } |1+z| = 1+|z| \text{ alors } z\in\mathbb{R}_+.}$$

Soit z et z' deux complexes vérifiant $|z+z'| = |z|+|z'|$ et $z \neq 0$.
En divisant par $|z| \neq 0$, on obtient :

$$\left|1+\frac{z'}{z}\right| = 1+\left|\frac{z}{z'}\right|.$$

Notons $\alpha = \dfrac{z'}{z}$. On a $|1+\alpha| = 1+|\alpha|$ donc par ce qui précède, $\alpha\in\mathbb{R}_+$ et $z' = \alpha z$.

$$\boxed{\text{Si } z \text{ et } z' \text{ sont deux nombres complexes vérifiant } |z+z'| = |z|+|z'| \text{ et } z\neq 0, \text{ alors } \exists\alpha\in\mathbb{R}_+ \mid z' = \alpha z.}$$

Q2. Remarquons qu'on peut poser $\lambda_1 = 1 \in \mathbb{R}_+$.
Soit $\ell \in [\![2,n]\!]$. On a par inégalité triangulaire :

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \left|z_1+z_\ell+\sum_{k\in[\![2,n]\!]\setminus\{\ell\}} z_k\right| \leqslant |z_1+z_\ell| + \sum_{k\in[\![2,n]\!]\setminus\{\ell\}}|z_k|$$

d'où

$$|z_1|+|z_\ell| \leqslant |z_1+z_\ell| \ \text{ et } \ |z_1+z_\ell| \leqslant |z_1|+|z_\ell|.$$

Ainsi, $|z_1+z_\ell| = |z_1|+|z_\ell|$ donc par ce qui précède, il existe $\lambda_\ell\in\mathbb{R}_+$ tel que $z_\ell = \lambda_\ell z_1$.

$$\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!],\ \exists\lambda_k\in\mathbb{R}_+ \text{ tel que } z_k = \lambda_k z_1.}$$

Q3. Soit $x\in\mathbb{R}^n$. On suppose $x \geqslant 0$.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Le cœfficient d'indice i de Ax est $[Ax]_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$.
Comme $A > 0$ et $x \geqslant 0$, on a pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $a_{i,j} > 0$ et $x_j \geqslant 0$.
Ainsi, $[Ax]_i \geqslant 0$ par somme de termes positifs.
On en déduit que $Ax \geqslant 0$.
On suppose de plus qu'on a $x \neq 0$.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$. On sait déja que $[Ax]_i \geqslant 0$.
Supposons qu'on ait $[Ax]_i = 0$ c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0$.
Un somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls.
On en déduit que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $a_{i,j}x_j = 0$ avec $a_{i,j}\neq 0$ car $A > 0$ d'où $x_j = 0$.
Ceci est absurde car $x \neq 0$. Ainsi, $[Ax]_i > 0$.
On a donc $Ax > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R}^n,\ \begin{cases} x \geqslant 0 \Longrightarrow Ax \geqslant 0, \\ x\geqslant 0 \text{ et } x\neq 0 \Longrightarrow Ax > 0.\end{cases}}$$

Q4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive. Montrons qu'on a $AB > 0$.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Notons C_j la $j$ème colonne de B.
Comme $B > 0$, $C_j > 0$ donc en particulier, $C_j \geqslant 0$ et $C_j \neq 0$ donc par la question précédente, $AC_j > 0$ donc la $j$ème colonne de AB est un vecteur strictement positif.
On en déduit que $AB > 0$.
On obtient alors le résultat souhaité par récurrence.
Le résultat est vrai pour $k = 1$ car $A > 0$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k > 0$.
On a alors $A^{k+1} = AA^k > 0$ en appliquant le résultat précédent avec $B = A^k$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ A^k > 0.}$$

Q5. Notons que $\rho(A)$ est bien défini car $\mathrm{sp}(A)$ est un ensemble fini non vide (puisqu'on considère ici les valeurs propres complexes).
Par définition, on a $\rho(A) \geqslant 0$ et si $\rho(A) = 0$ alors $\mathrm{sp}(A) = \{0\}$.
Comme χ_A est un polynôme unitaire de degré n, scindé sur $\mathbb{C}$, ayant pour seule racine 0, on a dans ce cas $\chi_A = X^n$.
Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A) = 0_n$ d'où $A^n = 0_n$, ce qui est contredit le résultat obtenu en Q4.
Ainsi :

$$\boxed{\rho(A) > 0.}$$

Montrons $\mathrm{sp}\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right) = \left\{\dfrac{\lambda}{\rho(A)},\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\right\}$.
En effet, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \lambda \in \mathrm{sp}(A) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \neq 0_{n,1} \text{ tel que } AX = \lambda X \\
\Longleftrightarrow\ & \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}), X \neq 0_{n,1} \text{ tel que } \frac{A}{\rho(A)}X = \frac{\lambda}{\rho(A)}X \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\lambda}{\rho(A)} \in \mathrm{sp}\left(\frac{A}{\rho(A)}\right).
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\rho\left(\frac{1}{\rho(A)}\right) = \max\left\{\left|\frac{\lambda}{\rho(A)}\right|,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\right\} = \sup\left\{\frac{1}{\rho(A)}|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\right\} = \frac{1}{\rho(A)}\sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$$

car $\dfrac{1}{\rho(A)}$ est un réel positif ne dépendant pas de λ et $\{|\lambda|, \lambda \in \mathrm{sp}(A)\} \neq \varnothing$.
On en déduit :

$$\rho\left(\frac{1}{\rho(A)}\right) = \frac{1}{\rho(A)}\max\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\} = \frac{1}{\rho(A)} \times \rho(A) = 1.$$

$$\boxed{\rho\left(\frac{1}{\rho(A)}\right) = 1.}$$

Q6. On suppose $\rho(A) < 1$.
Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$ puisque A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (c'est la matrice diagonale de cœfficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$).
On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)P^{-1}$.
Comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i| \leqslant \rho(A) < 1$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \lambda_i^k = 0$.
Par convergence des suites de coordonnées dans la base canonique, on en déduit que $\lim\limits_{k \to +\infty} D^k = 0_n$.
Ainsi, $\lim\limits_{k \to +\infty} PD^kP^{-1} = 0_n$ c'est-à-dire $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0_n$.

Justification 1 (5/2) : En effet, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est une application linéaire définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension finie, donc continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Justification 2 (3/2) : On a vu dans l'exemple 5.3.(b) du cours ESPACES VECTORIELS NORMÉS que si deux suites matricielles convergent alors leur produit converge vers le produit des limites. On l'utilise ici avec la suite constante égale à P, la suite (D^k) et la suite constante égale à P^{-1}.

$$\boxed{\text{Si } \rho(A) < 1 \text{ alors } \lim_{k\to+\infty} A^k = 0_n.}$$

Q7. On sait que $Ax = \lambda x$ donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$.
En passant au module et par inégalité triangulaire, on a alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$|x_i| = |\lambda x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|$$

puisque $|\lambda| = 1$ et les cœfficients de A sont positifs.
Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|x_i| \leqslant [A|x|]_i$ et donc $[A|x| - |x|]_i \geqslant 0$, on a :

$$\boxed{|x| \leqslant A|x|.}$$

Q8. Notons tout d'abord qu'on a $|x| \geqslant 0$ et $|x| \neq 0$ (car x est un vecteur propre) donc par Q3, $A|x| > 0$ c'est-à-dire pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $[A|x|]_i > 0$.
On a également $A|x| - |x| \geqslant 0$ par Q7 et $A|x| - |x| \neq 0$ (puisqu'on a supposé $A|x| - |x| > 0$). Par Q3, on a donc aussi $A^2|x| - A|x| > 0$ c'est-à-dire pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $[A^2|x| - A|x|]_i > 0$.
Posons alors $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\min\left\{\dfrac{[A^2|x| - A|x|]_i}{[A|x|]_i},\ i \in [\![1,n]\!]\right\}$.
Par ce qui précède, ε est bien défini et strictement positif.
On a de plus pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{[A^2|x| - A|x|]_i}{[A|x|]_i} \geqslant 2\varepsilon$ donc $[A^2|x| - A|x|]_i \geqslant 2\varepsilon[A|x|]_i > \varepsilon[A|x|]_i$ d'où :

$$[A^2|x| - A|x| - \varepsilon A|x|]_i > 0.$$

On a donc bien $A^2|x| - A|x| - \varepsilon A|x| > 0$.

$$\boxed{\text{Il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } A^2|x| - A|x| > \varepsilon|x|.}$$

Q9. Montrons le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
Initialisation : On a $B^1A|x| = \dfrac{1}{1+\varepsilon}A^2|x|$.
Or, par Q8, $A^2|x| - (1+\varepsilon)A|x| > 0$ donc $\dfrac{1}{1+\varepsilon}A^2|x| - A|x| > 0$ (pour le prouver, on peut raisonner cœfficient par cœfficient).
Ainsi, $BA|x| > A|x|$ donc a fortiori, $BA|x| \geqslant A|x|$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^kA|x| \geqslant A|x|$.
On a $B^{k+1}A|x| = \dfrac{1}{1+\varepsilon}A \times B^kA|x|$.
Or, $B^kA|x| - A|x| \geqslant 0$ donc par Q3, $AB^kA|x| - A^2|x| \geqslant 0$.
On en déduit en multipliant par $\dfrac{1}{1+\varepsilon}$ que $B^{k+1}A|x| \geqslant \dfrac{1}{1+\varepsilon}A^2|x| \geqslant A|x|$ d'après l'initialisation.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ B^kA|x| \geqslant A|x|.}$$

Q10. Comme $B = \dfrac{1}{1+\varepsilon}A$, on a $\mathrm{sp}(B) = \left\{\dfrac{\lambda}{1+\varepsilon}, \lambda \in \mathrm{sp}(A)\right\}$ et on a alors $\rho(B) = \dfrac{1}{1+\varepsilon}\rho(A)$ (même preuve qu'en Q5 en remplaçant $\rho(A)$ par $1+\varepsilon$).
On a donc $\rho(B) = \dfrac{1}{1+\varepsilon} < 1$ donc par le résultat admis après Q6, on déduit :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} B^k = 0.}$$

Q11. On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k A|x| = 0$.
Justification 1 (5/2) : L'application $M \mapsto MA|x|$ est une application linéaire définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, espace vectoriel de dimension finie, donc continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Justification 1 (3/2) : Le résultat de l'exemple 5.3.(b) du cours ESPACES VECTORIELS NORMÉS est encore valable pour une suite de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et une suite de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (preuve analogue) et on l'applique avec la suite (B^k) et la suite constante égale à $A|x|$.
On a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $[B^k A|x|]_i - [A|x|]_i \geqslant 0$ donc par passage à la limite lorsque k tend vers $+\infty$, on obtient $-[A|x|]_i \geqslant 0$ (convergence des suites de coordonnées dans la base canonique), ce qui est absurde car on sait que $[A|x|]_i > 0$.
On a donc prouvé par l'absurde qu'on n'a pas $|x| < A|x|$.
On a donc $|x| \leqslant A|x|$ et on n'a pas $|x| < A|x|$ mais attention, cela ne permet pas de conclure immédiatement que $|x| = A|x|$... (Un vecteur peut être positif, ne pas être strictement positif mais ne pas être nul. Il suffit qu'il soit positif avec au moins une coordonnée nulle.) Pour le prouver, on peut se rendre compte que si l'on suppose $|x| \neq A|x|$, les raisonnements effectués aux questions Q8, Q9 et Q10 sont encore valables, donc on arrive également à une absurdité.
On a donc $A|x| = 1.|x|$ avec $|x| \neq 0$ d'où :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A.}$$

Q12. Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
D'après la partie B (en prenant $\lambda = 1$), on a $A|x| = 1.|x|$ avec $|x| \neq 0$ donc $|x|$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
De plus, $|x| \geqslant 0$ et $|x| \neq 0$ donc par Q3, $A|x| > 0$ donc comme $A|x| = |x|$, $|x| > 0$.

$$\boxed{A \text{ admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre } 1.}$$

Q13. Soit λ une valeur propre de module 1 de A et x un vecteur propre associé.
On sait que $Ax = \lambda x$ et d'après la partie B, $A|x| = |x|$.
On a donc en étudiant la première coordonnées :

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j\right| = |\lambda x_1| = |x_1| = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}|x_j|.$$

On se trouve donc dans un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Par la question Q2, on en déduit que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:

$$\exists \lambda_j \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } a_{1,j}x_j = \lambda_j a_{1,1} x_1.$$

Notons qu'on a nécessairement $x_1 \neq 0$ car sinon, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $x_j = 0$ puisque $a_{1,j} > 0$, ce qui est absurde car $x \neq 0$.
On a alors :

$$\lambda x_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) a_{1,1} x_1.$$

En divisant par x_1, on en déduit que $\lambda = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j\right) a_{1,1}$ donc λ est un réel positif.
Comme $|\lambda| = 1$, on en déduit que $\lambda = 1$.

$$\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de module 1 de } A.}$$

Q14. On a montré en Q12 que si x est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 alors $|x| > 0$.
Raisonnons par l'absurde en supposant $\dim E_1(A) \geqslant 2$.
On peut alors considérer deux vecteurs u et v de $E_1(A)$ formant une famille libre.
On a $u \neq 0$ et $u \in E_1(A)$ donc $|u| > 0$ donc en particulier, $u_1 \neq 0$ (où l'on a noté u_1 la première coordonnées de u).
Posons alors $w = v_1 u - u_1 v$.

Par combinaison de vecteurs de $E_1(A)$, $w \in E_1(A)$. Comme la famille (u,v) est libre et $u_1 \neq 0$, $w \neq 0$. Ainsi, $|w| > 0$ donc toutes les coordonnées de w sont non nuls, ce qui est absurde car par construction, $w_1 = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\dim E_1(A) = 1.}$$

Q15. Soit A une matrice strictement positive.
D'après Q5, $\rho(A) > 0$ et $B = \dfrac{A}{\rho(A)}$ est une matrice strictement positive vérifiant $\rho(B) = 1$.
D'après B., $1 \in \mathrm{sp}(B)$ et si $\lambda \in \mathrm{sp}(B) \setminus \{1\}$, $|\lambda| \leqslant 1$ (car $\rho(B) = 1$) et $|\lambda| \neq 1$ d'après Q13. Donc 1 est une valeur propre dominante de B. D'après Q14, $E_1(B)$ est de dimension 1 et d'après Q12, $E_1(B)$ est dirigé par un vecteur propre strictement positif x_0 (puisque tout vecteur propre dirige $E_1(B)$).
Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$Bx = \lambda x \iff Ax = \rho(A)\lambda x.$$

On en déduit que $\mathrm{sp}(A) = \{\rho(A)\lambda,\ \lambda \in \mathrm{sp}(B)\}$ et donc en particulier le fait que $\rho(A) \in \mathrm{sp}(A)$, et $E_1(B) = E_{\rho(A)}(A) = \mathrm{Vect}(x_0)$ donc $E_{\rho(A)}(A)$ est de dimension 1 et dirigé par le vecteur x_0 strictement positif (qui est bien sûr un vecteur propre de A car non nul et appartenant à un sous-espace propre).
De plus, si $\mu \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$, $|\mu| \leqslant \rho(A)$ et $|\mu| \neq \rho(A)$ car sinon $\left|\dfrac{\mu}{\rho(A)}\right| = 1$ avec $\dfrac{\mu}{\rho(A)} \in \mathrm{sp}(B)$ donc $\dfrac{\mu}{\rho(A)} = 1$ d'où $\mu = \rho(A)$, absurde. Donc $\rho(A)$ est bien une valeur propre dominante de A.

$$\boxed{\text{La proposition 1 a été prouvée.}}$$

Q16. Comme $Y \in E_\lambda(A)$, on a $AY = \lambda Y$ et donc pour tout polynôme P, on a $P(A)Y = P(\lambda)Y$.
En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^pY = \lambda^pY$ donc $Y_p = \left(\dfrac{\lambda}{\rho(A)}\right)^p Y$.
Comme $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A et $\lambda \in S$, on a $|\lambda| < \rho(A)$ donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \left(\frac{\lambda}{\rho(A)}\right)^p = 0$ (suite géométrique de raison r avec $|r| < 1$).
On obtient (par exemple en utilisant les suites de coordonnées dans la base canonique) que :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} Y_p = 0.}$$

Q17. Comme A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, on a :

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_{\rho(A)}(A) \oplus \bigoplus_{\lambda\in S} E_\lambda(A).$$

Le vecteur Y s'écrit donc de manière unique :

$$Y = Y_{\rho(A)} + \sum_{\lambda\in S} Y_\lambda \text{ avec } Y_{\rho(A)} \in E_{\rho(A)}(A) \text{ et pour tout } \lambda \in S,\ Y_\lambda \in E_\lambda(A).$$

Par définition, $Y_{\rho(A)}$ est le projeté de Y sur $E_{\rho(A)}(A)$ parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in S} E_\lambda(A)$.
On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$Y_p = \left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y_{\rho(A)} + \sum_{\lambda\in S}\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y_\lambda = Y_{\rho(A)} + \sum_{\lambda\in S}\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y_\lambda$$

car $AY_{\rho(A)} = \rho(A)Y$ donc $A^pY_{\rho(A)} = (\rho(A))^pY_{\rho(A)}$.
D'après la question précédente, pour tout $\lambda \in S$, $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^p Y_\lambda = 0$ d'où par somme :

$$\lim_{p\to+\infty} Y_p = Y_{\rho(A)}.$$

$$\boxed{\text{La suite } (Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers le projeté de } Y \text{ sur } E_{\rho(A)}(A) \text{ parallèlement à } \bigoplus_{\lambda\in S} E_\lambda(A).}$$

On sait que $E_{\rho(A)}(A)$ est de dimension 1, dirigé par un vecteur x_0 strictement positif (proposition 1) donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Y_{\rho(A)} = \alpha x_0$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $Y_p \geqslant 0$ car $A^p > 0$ par Q4, $\rho(A) > 0$ par Q5 et $Y \geqslant 0$ d'où le résultat par Q3.
Par les suites de coordonnées dans la base canonique, on en déduit que $Y_{\rho(A)} = \lim\limits_{p\to+\infty} Y_p \geqslant 0$ (passage à la limite dans des inégalités larges).
On a donc nécessairement $\alpha \geqslant 0$ (par exemple en regardant la première coordonnée de $Y_{\rho(A)}$) et donc si $Y_{\rho(A)} \neq 0$, $\alpha > 0$. On en déduit que $Y_{\rho(A)}$ est strictement positif.

$$\boxed{\text{S'il est non nul, le projeté de } Y \text{ est strictement positif.}}$$

Q18. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert-Gauss (c'est un polynôme de degré $n \geqslant 1$) donc A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$.
Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les cœfficients diagonaux de T.
Comme A et T sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique donc :

$$\chi_A = \chi_T = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k) \quad (T \text{ triangulaire}).$$

On en déduit que $\boxed{\lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ sont les valeurs propres de } A \text{ (répétées selon leurs multiplicités).}}$
On a alors :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = PT^kP^{-1} \text{ et les cœfficients diagonaux de } T^k \text{ sont } \lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k.}$$

Q19. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Deux matrices semblables ont la même trace donc $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(T^k) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.
Pour tout $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$, on note m_λ la multiplicité de λ.
On sait que $\rho(A)$ est une valeur propre de A. On a alors :

$$\operatorname{tr}(A^k) = m_{\rho(A)}(\rho(A))^k + \sum_{\lambda\in S} m_\lambda \lambda^k$$

où $S = \operatorname{sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$.
On sait par la proposition 1 que $\rho(A)$ est une valeur propre dominante donc :

$$\text{pour tout } \lambda \in S,\ |\lambda| < \rho(A).$$

Ainsi pour tout $\lambda \in S$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\lambda^k}{(\rho(A))^k} = 0$ donc :

$$\operatorname{tr}(A^k) \underset{k\to+\infty}{\sim} m_{\rho(A)}(\rho(A))^k.$$

De même :

$$\operatorname{tr}(A^{k+1}) \underset{k\to+\infty}{\sim} m_{\rho(A)}(\rho(A))^{k+1}.$$

Ainsi :

$$\frac{\operatorname{tr}(A^{k+1})}{\operatorname{tr}(A^k)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{m_{\rho(A)}(\rho(A))^{k+1}}{m_{\rho(A)}(\rho(A))^k} = \rho(A).$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \frac{\operatorname{tr}(A^{k+1})}{\operatorname{tr}(A^k)} = \rho(A).}$$