DM7 (Séries entières, réduction)
À rendre le vendredi 20 décembre

Exercice 1 (niveau 1) Étude d'une série entière

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\quad a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+2}$.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.
2. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
   Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

   Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n+2}$.

   (b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$.

   (c) On note $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$ la série entière produit de Cauchy des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{n+2}$.
   Justifier que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

   (d) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = f(x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2}$.
4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(f(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
5. En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
   On utilisera sans le redémontrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.
6. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 2 (niveau 2)
Méthode de Héron et approximation des racines carrées

Ce sujet comporte quatre parties, qui peuvent être traitées indépendamment :
- La partie I étudie deux façons d'approcher le réel $\sqrt{2}$.
- La partie II généralise la méthode de Héron d'Alexandrie étudiée en sous-partie I.B au cadre des matrices symétriques positives.
- La partie III traite le cas général de la méthode de Newton numérique réelle.
- La partie IV s'inspire de la méthode de Newton abordée en partie III pour établir l'existence de la décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford, par une approche algorithmique et en donne une application à la détermination de la racine carrée de certaines matrices.

Notations

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et q est un entier naturel non nul.
On note $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées de taille q à coefficients dans $\mathbb{K}$; on note I_q la matrice identité dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et P^{T} la transposée d'une matrice P. On note $\mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{O}(q)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ constitué des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices $P \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ vérifiant $P^{\mathrm{T}}P = I_q$.
Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de M. Pour $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{K}$, on note $\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_q)$ la matrice A de $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telle que, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$:

$$[A]_{i,j} = \begin{cases} a_i \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On munit l'ensemble $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que, par l'équivalence des normes en dimension finie, la notion de convergence d'une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ ne dépend pas du choix de la norme $\|\cdot\|$. On pourra alors utiliser librement et sans démonstration dans tout le sujet les deux résultats suivants :
pour toute suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$,

- la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M si et seulement si, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant q$, la suite $\left([M_n]_{i,j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $[M]_{i,j}$;
- si $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et si la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M, alors les suites $(AM_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_nA)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers AM et MA.

I. Quelques approximations de $\sqrt{2}$

I. A - Via un développement en série entière

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k).$$

Q1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ vaut :

$$R = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Q2. Donner, sans justification supplémentaire, l'expression de la fonction somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ sur $]-R, R[$.

Q3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}$. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n$$

Q4. Déterminer un équivalent simple de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1} b_n$.

Q5. Montrer que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1} b_n x^n$ converge uniformément sur $[-1, 1]$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n$.

Q6. Montrer que

$$\sqrt{2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} b_k + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

I.B - Via la méthode de Héron d'Alexandrie

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} c_0(a) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1}(a) = \dfrac{1}{2}\left(c_n(a) + \dfrac{a}{c_n(a)}\right). \end{cases}$$

Q7. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}, c_n(a)$ est bien défini et que $c_n(a) > 0$.

Q8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de $c_{n+1}(a)^2 - a$ faisant intervenir $(c_n(a)^2 - a)^2$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1, c_n(a) \geqslant \sqrt{a}$.

Q9. Montrer que $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Q10. Calculer $c_1(2)$. À l'aide de la question Q 8 , montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n(2)^2 - 2 \leqslant 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}.$$

En déduire que

$$\sqrt{2} = c_n(2) + \underset{n \to +\infty}{O}\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right).$$

I.C - Comparaison des différentes approximations de $\sqrt{2}$: vitesses de convergence

Q11. Parmi les deux suites $\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$, déterminer celle qui converge le plus vite vers zéro.

II Racine carrée d'une matrice symétrique positive

On note $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices $M \in \mathcal{S}_q(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

Dans toute cette partie, étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$, on appelle racine carrée de M toute matrice $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

Soit $M \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les valeurs propres de M comptées avec multiplicité. On admet que, d'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}(q)$ telle que

$$M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) P^{\mathrm{T}}.$$

II.A - Existence et unicité d'une racine carrée symétrique positive

Q12. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = M$.

Q13. Montrer que B est la seule racine carrée de M appartenant à $\mathcal{S}_q^+(\mathbb{R})$.

On note alors $\sqrt{M}$ l'unique racine carrée symétrique positive de M.

II. C - Une méthode de Héron d'Alexandrie matricielle

On rappelle que pour tout réel $a \geqslant 0$, la suite $(c_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ définie en sous-partie I.B, est à valeurs strictement positives et converge vers $\sqrt{a}$. On pose alors :

$$\begin{cases} M_0 = I_q \\ \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(M_n + M M_n^{-1}\right). \end{cases}$$

Q14. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}, M_n$ est bien définie et que

$$M_n = P \operatorname{diag}\left(c_n\left(\lambda_1\right), \ldots, c_n\left(\lambda_q\right)\right) P^{\mathrm{T}}.$$

Q15. En déduire que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{M}$.

III Méthode de Newton numérique

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que f' ne s'annule pas sur I.

III. A - Convergence de la méthode de Newton

Q16. Que dire du nombre du nombre de points d'annulation de f sur I ?

On suppose qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$. Pour tout $r > 0$, on pose $J_r = [c - r, c + r]$.
Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\begin{cases} c_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = c_n - \dfrac{f\left(c_n\right)}{f'\left(c_n\right)} \end{cases}$$

L'objectif de cette sous-partie III.A est de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $J_r \subset I$ et tel que, si $c_0 \in J_r$, alors $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

Q17. Soit $r > 0$ tel que $J_r \subset I$. Justifier que $s_r = \sup_{J_r} |f''|$ et $i_r = \inf_{J_r} |f'|$ sont bien définis et que $i_r > 0$.

On note $K_r = \dfrac{s_r}{2 i_r}$.

Q18. Justifier qu'il existe $r > 0$ tel que $0 \leqslant r K_r < 1$.

Dans la suite de cette sous-partie III.A, on fixe $r > 0$ tel que $rK_r < 1$.

Q19. On suppose que $n \in \mathbb{N}$ et $c_n \in J_r$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|c_{n+1} - c| \leqslant K_r |c_n - c|^2,$$

puis en déduire que $c_{n+1} \in J_r$.

Q20. Montrer que, si $c_0 \in J_r$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, |c_n - c| \leqslant \dfrac{(K_r |c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$ et conclure.

IV Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford et calcul de racine carrée

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0$.
Dans toute cette partie IV, on fixe $M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de M (avec $s \in \mathbb{N}^*$). On définit alors

$$P(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i).$$

On note P' le polynôme dérivé de P.
Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{d} \gamma_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $Q(M) = \sum_{k=0}^{d} \gamma_k M^k \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ et on pose

$$\mathbb{C}[M] = \{Q(M) \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}$$

On admet alors et on pourra utiliser librement que :
- si $A, B \in \mathbb{C}[M]$, alors A et B commutent, et $A + B$ et AB appartiennent à $\mathbb{C}[M]$;
- si $Q \in \mathbb{C}[X]$ et si $A \in \mathbb{C}[M]$, alors $Q(A) \in \mathbb{C}[M]$.

IV.A - Une méthode de Newton matricielle

Q21. Montrer que, pour toute racine complexe μ de P', la matrice $M - \mu I_q$ est inversible. En déduire que $P'(M)$ est inversible.

Q22. Montrer que le polynôme caractéristique χ_M de M divise P^q. En déduire que $P(M)$ est nilpotente.

Grâce à ces résultats, on peut définir la suite de matrices $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$\begin{cases} M_0 = M \\ \forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = M_n - P(M_n) P'(M_n)^{-1}. \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
- M_n est bien définie et appartient à $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$;
- il existe $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$;
- la matrice $P'(M_n)$ est inversible.

Q23. Montrer que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

Q24. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les matrices M et M_n commutent.

Q25. On note A la limite de $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que A est diagonalisable.

Q26. On pose $N = M - A$. Justifier que A et N commutent et que N est nilpotente.

IV.B - Un calcul de racine carrée pour certaines matrices réelles trigonalisables

Q27. En utilisant le développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, montrer qu'il existe un polynôme $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

Q28. En déduire l'expression d'une racine carrée de $I_q + N$ lorsque N est une matrice nilpotente.

Pour les questions suivantes, on suppose que M est à coefficients réels et trigonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et que le spectre de M est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
On considère alors les matrices A et N introduites dans la sous-partie IV.A.

Q29. Justifier que A et N sont à coefficients réels et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Q30. Montrer que le spectre de A est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

Q31. Justifier que la méthode de Héron d'Alexandrie de la sous-partie II.C peut être appliquée à la matrice A afin d'obtenir une racine carrée A' de A. En déduire l'expression d'une racine carrée de M.