Travaux Dirigés de M_2

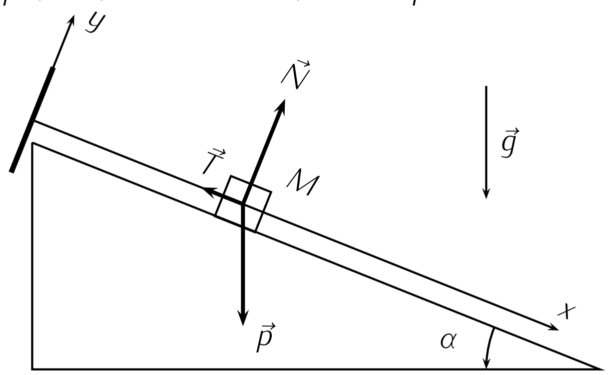
Exercice 1 : Glissement d'un objet sur un plan incliné

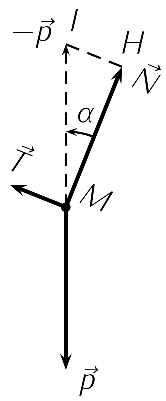
Soit un objet de centre d'inertie M et de masse m posé sur un plan incliné qui fait l'angle α avec l'horizontale. On note f_0 le cœfficient de frottement statique et f le cœfficient de frottement dynamique. On rappelle que d'après les lois de Coulomb sur le frottement solide, si on décompose la réaction du support $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ où $\vec{T}$ est la réaction tangentielle et $\vec{N}$ la réaction normale, $T < f_0 N$ au repos et $T = f.N$ lors du glissement.

1. Pour quelle valeur α_0 de α l'objet va-t-il commencer à glisser sur le plan incliné (mouvement de translation) ?
2. Étudier le mouvement ultérieur, $x(t)$ où x est le déplacement de l'objet sur le plan incliné.

1. On se place dans le référentiel galiléen lié au sol, le système étudié est le point matériel M.
   Pour plus de simplicité, on raisonne dans le cas où le système est encore à l'équilibre sous l'action des forces qui lui sont appliquées.
   Bilan des forces (Cf fig ci-dessous à gauche) :
   - le poids $\vec{p} = m.\vec{g}$,
   - la réaction du support $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ en décomposant la réaction normale $\vec{N}$ et la réaction tangentielle $\vec{T}$.

   Dans le cas considéré, d'après le principe d'inertie (ou première loi de Newton), la somme vectorielle de ces forces est nulle. On représente ces trois forces sur la figure ci-dessous à droite en respectant $\vec{p} + \vec{T} + \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{T} + \vec{N} = -\vec{p}$

   Dans le triangle MIH obtenu, rectangle en H, on peut écrire $\tan\alpha = \frac{T}{N}$ or d'après les lois de Coulomb, il n'y a pas de glissement tant que $T < f_0 N \Rightarrow \frac{T}{N} = \tan\alpha < f_0$.
   On en déduit que l'angle limite d'adhérence est $\alpha_0 = \arctan f_0$.
2. Pour $\alpha \geq \alpha_0$, le mobile se met en mouvement et on appliquera plutôt la seconde loi de Newton.
   Le référentiel, le système et les forces qui lui sont appliquées restent identiques mais l'accélération $\vec{a}$ n'est plus nulle : $m.\vec{a} = \vec{p} + \vec{T} + \vec{N} \neq \vec{0}$
   Comme le mobile se déplace selon un axe (mouvement de translation), on a intérêt à travailler par projection suivant le système d'axes (Oxy) avec O la position initiale de M, Ox selon le plan incliné et Oy normal à Ox.
   On a alors $\vec{a} = \ddot{x}(t).\vec{e}_x$ et pour les forces, en s'aidant de la figure, $\vec{T} = -T.\vec{e}_x$, $\vec{N} = N.\vec{e}_y$ et $\vec{p} = mg\sin\alpha.\vec{e}_x - mg\cos\alpha.\vec{e}_y$.
   On peut écrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) sous la forme $-T.\vec{e}_x + N.\vec{e}_y + mg\sin\alpha.\vec{e}_x - mg\cos\alpha.\vec{e}_y = m\ddot{x}(t)\vec{e}_x$

Par projection selon $\vec{e}_x$, on obtient $-T + mg\sin\alpha = m\ddot{x}(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{T}{m} + g\sin\alpha$.

Pour éliminer l'inconnue T, on utilise ensuite la relation $T = f.N$ (loi de Coulomb sur le glissement solide) et la projection du PFD selon $\vec{e}_y$, soit $0 + N - mg\cos\alpha = m\ddot{y}(t) = 0$ car pas de mouvement selon $\vec{e}_y$. On en déduit $N = mg\cos\alpha \Rightarrow T = fmg\cos\alpha$.

En remplaçant, on obtient $\ddot{x}(t) = -fg\cos\alpha + g\sin\alpha \Rightarrow \dot{x}(t) = g(\sin\alpha - f.\cos\alpha)t + v_0$ où v_0 est la valeur initiale de $\dot{x}$, c'est à dire $v_0 = 0$.

Puis par intégration $x = \frac{g}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2 + x_0 = \frac{g}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2$.

Remarque : il s'agit d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

Exercice 2 : **Parabole de sûreté**

Une particule (projectile) est lancée depuis un point O pris pour origine des espaces et des temps. La vitesse initiale $\vec{v_0}$ fait avec l'horizontale de O un angle $\alpha > 0$.

1. Établir l'équation de la trajectoire.
2. Déterminer les coordonnées du sommet S et la portée OB, les dates T_S et t_B auxquels sont atteints les points S et B.
3. Montrer que l'ensemble des points de l'espace que l'on peut atteindre dans les conditions précédentes est située sous une courbe dont on établira une équation en $\tan\alpha$.

1. $z = -\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha = \tan\alpha x - \frac{g}{2v_0^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2$.
2. $x_S = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha$, $x_B = 2x_S$.
3. Pour qu'un point $N(x,z)$ puisse être atteint par une roquette, il faut qu'il existe un angle α tel que les coordonnées (x,z) vérifient la relation $z(x)$ précédente. Or, lorsque les coordonnées (x,z) sont fixées, l'équation précédente correspond à une équation du second degré vérifiée par $\tan\alpha$:

$$\tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gx}\tan\alpha + \left(1 + \frac{2v_0^2 z}{gx^2}\right) = 0$$

On peut trouver une solution réelle de $\tan\alpha$ (et donc un angle α) si et seulement si le discriminant de l'équation est positif, soit :

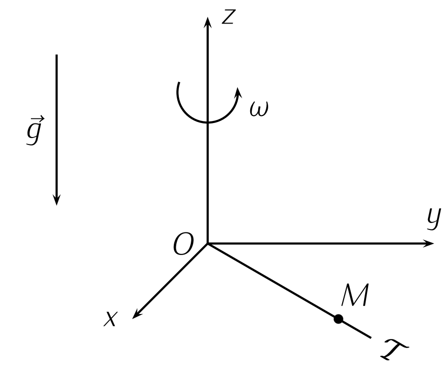
$$\Delta = \frac{4v_0^4}{g^2x^2} - 4\left(1 + \frac{2v_0^2 z}{gx^2}\right) \geq 0 \Rightarrow v_0^4 - 2v_0^2 - g^2x^2 \geq 0 \Rightarrow z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Seul les points situés sous la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation $z = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_1^2}$ peuvent donc être atteints par un tir de roquette. Les points situés au dessus ne pourront jamais être atteint. L'équation de cette courbe est une parabole.

Exercice 3 : **Coulissement sur une tige en rotation**

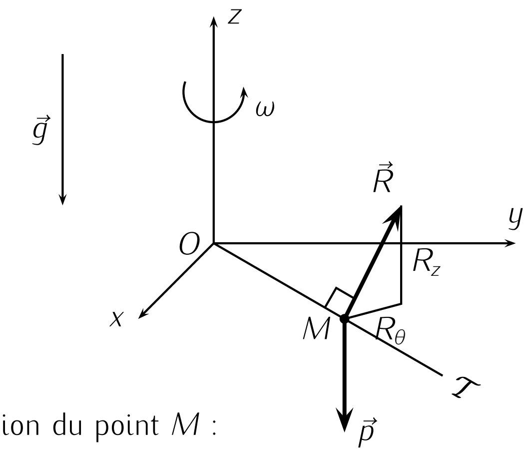
Une tige $\mathcal{T}$ horizontale passant par O tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante.
Un point matériel M de masse m peut coulisser sans frottement sur la tige. Il est repéré par ses coordonnées polaires (r,θ) dans le plan (Oxy).
À l'instant $t = 0$, le point M est abandonnée sans vitesse initiale par rapport à la tige à la distance r_0 de l'origine O ; on a donc

$$r(t=0) = r_0 \text{ et } \dot{r}(t=0) = 0$$



On suppose de plus qu'à ce même instant, la tige est confondue avec l'axe (Ox) : $\theta(t=0) = 0$.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique en projection dans la base cylindrique $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.
2. En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $r(t)$.
3. Déterminer la loi horaire $r(t)$ en fonction de r_0 et ω. Tracer l'allure de $r(t)$ pour $t \geq 0$.
4. Reprendre la question précédente pour la trajectoire $r(\theta)$.



1. On travaille ici dans le référentiel local $\mathcal{R}(O,Ox,Oy,Oy)$ supposé galiléen.
   Le système { point matériel M } est soumis à
   - son poids $\vec{p} = m\vec{g} = -mg.\vec{u}_z$
   - la réaction de l'axe $\vec{R} = \vec{R}_N$ normale à la tige puisqu'on néglige tout frottement. Cela signifie qu'elle ne comporte pas de composante radiale (voir figure) et qu'elle s'écrit ainsi $\vec{R} = R_\theta.\vec{u}_\theta + R_z.\vec{u}_z$.

   Par ailleurs, on retrouve rapidement l'expression de l'accélération du point M :

   $$\vec{OM} = r.\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = \ddot{r}.\vec{u}_r + \dot{r}(\dot{\theta}.\vec{u}_\theta) + \dot{r}\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\theta}(-\dot{\theta}.\vec{u}_r)$$

   et avec $\dot{\theta} = \omega$ la vitesse angulaire constante ici, on aboutit à $\vec{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r).\vec{u}_r + 2\omega\dot{r}.\vec{u}_\theta$
   On peut ainsi écrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme :

   $$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R} \Rightarrow m[(\ddot{r} - \omega^2 r).\vec{u}_r + 2\omega\dot{r}.\vec{u}_\theta] = -mg.\vec{u}_z + R_\theta.\vec{u}_\theta + R_z.\vec{u}_z$$

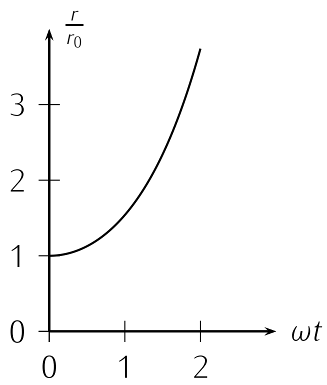
2. Par projection selon $\vec{u}_r$ de l'équation vectorielle précédente on obtient l'équation différentielle en $r(t)$:

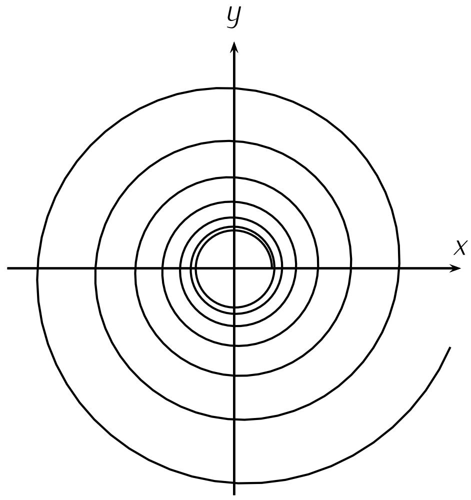
   $$m(\ddot{r} - \omega^2 r) = 0 \Rightarrow \ddot{r} = \omega^2 r$$

   Remarque : la projection du PFD selon $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_\theta$ permet d'obtenir $R_z = mg$ et $R_\theta = 2\omega\dot{r}$.
3. La solution de l'équation différentielle du second ordre, à coefficients constants, de signes **différents** en $r(t)$ est de la forme $r(t) = A.\exp(\omega t) + B.\exp(-\omega t)$ où A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales :

   $$\left| \begin{array}{l} r(0) = r_0 \\ \dot{r}(0) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} A + B = r_0 & (1) \\ \omega A - \omega B = 0 & (2) \end{array} \right. \text{ et (1)+(2)}/\omega \Rightarrow 2A = r_0 \text{ soit } A = \frac{r_0}{2} = B$$

   On en déduit finalement $r(t) = \frac{r_0}{2}[\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)] = r_0 \cosh(\omega t)$ (fonction cosinus hyperbolique) : $r(t)$ diverge.





4. Comme $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$, on en déduit $\theta = \omega t + 0$ en considérant $\theta(0) = 0$ et ainsi $r(t) = r_0 \cosh \theta$. La trajectoire est donc une spirale exponentielle.

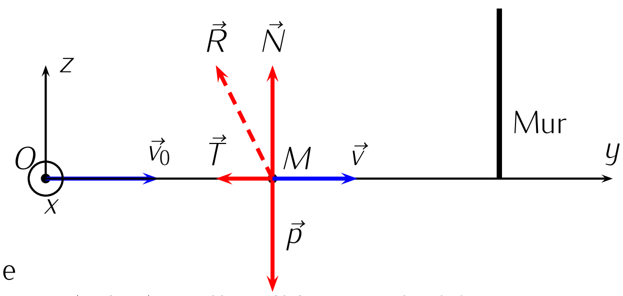
Exercice 4 : **Bon à savoir ...**

Une voiture M de masse m suit une trajectoire rectiligne sur le sol horizontal à une vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0.\vec{e}_y$ jusqu'à l'instant $t = 0$ où le conducteur aperçoit un mur (!) infini (!!) perpendiculaire à $\vec{v}_0$ à la distance D. On suppose pour simplifier que seulement deux choix s'offrent au conducteur :

- soit il freine brutalement en bloquant les roues (la voiture n'a pas d'ABS) tout en gardant une trajectoire rectiligne.
- soit il tourne sans freiner et à la limite du dérapage sur une trajectoire circulaire pour essayer d'éviter le mur (considéré comme infini).

On supposera que la nature du contact des roues avec le sol est telle que dans les deux cas, la composante tangentielle de la force de frottement est proportionnelle (facteur f) à sa composante normale $T = f.N$ (loi de Coulomb sur les frottements). Quel est le meilleur choix ?

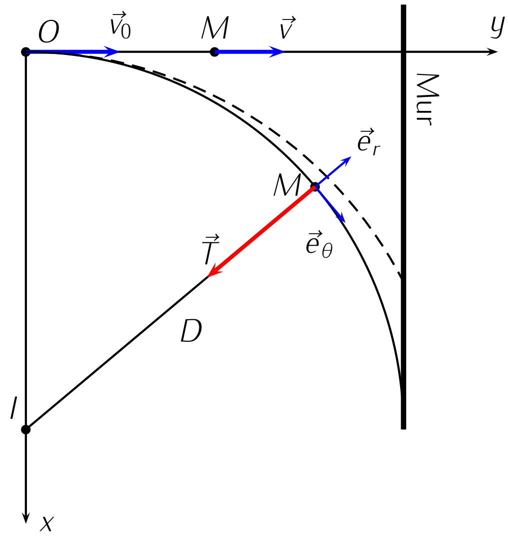
- Premier choix : la voiture parcourt une trajectoire rectiligne selon l'axe Oy.
  On se place dans le référentiel galiléen lié au sol, le système étudié est { le point matériel M }.
  Bilan des forces (Cf fig ci-dessous) :
  - le poids $\vec{p} = m.\vec{g}$,
  - la réaction du support $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ en décomposant la réaction normale $\vec{N}$ et la réaction tangentielle $\vec{T}$ avec $T = ||\vec{T}|| = f.||\vec{N}|| = fN$.



  On applique la seconde loi de Newton (ou principe fondamental de la dynamique PFD) : $\vec{p} + \vec{T} + \vec{N} = m.\vec{a}$ où $\vec{a}$ est l'accélération de M.
  On a tout intérêt ici à travailler dans la dans cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
  On a alors $\vec{a} = \ddot{x}.\vec{e}_x + \ddot{y}.\vec{e}_y + \ddot{z}.\vec{e}_z = \ddot{y}.\vec{e}_y$.
  Forces : $\vec{p} = -mg.\vec{e}_z$ et $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} = N.\vec{e}_z - T.\vec{e}_y$.
  Par projection du PFD selon $\vec{e}_y$, on obtient $m\ddot{y} = -T \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{T}{m} = -\frac{fN}{m}$.
  On détermine ensuite N par projection du PFD selon $\vec{e}_z$: $0 = mg - N \Rightarrow N = mg$.
  On a ainsi $\ddot{y}(t) = -fg < 0$: mouvement rectiligne uniformément décéléré.
  Par intégration successives et en respectant les conditions initiales, on en déduit $\dot{y}(t) = v(t) = -fgt + v_0$ et $y(t) = -\frac{1}{2}fgt^2 + v_0 t$ l'équation horaire.
  Il faut que la voiture s'arrête ($v(t) = 0$) avant de toucher le mur ($y(t_1) \leq D$).

On a $v(t_1) = 0 \Rightarrow -fgt_1 + v_0 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{fg}$ et $y(t_1) \leq D \Rightarrow -\frac{1}{2}fgt_1^2 + v_0t_1 = -\frac{1}{2}fg[\frac{v_0}{fg}]^2 + v_0.\frac{v_0}{fg} = \frac{v_0^2}{2fg} \leq D$ Finalement, il faut que $D \geq \frac{v_0^2}{2fg}$.

- Deuxième choix : mouvement circulaire uniforme à la limite d'adhérence (figure ci-dessous). Ce choix est le bon si le rayon de courbure est inférieur ou égal à D (contre exemple tracé en pointillés).



En conservant le même système et référentiel, le bilan des forces reste identique et $m.\vec{a} = \vec{p} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{T}$ car comme la route est horizontale, $\vec{N} = -\vec{p}$.

Vu le type de mouvement, il vaut mieux se placer dans la base cylindro-polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, l'origine du repère étant maintenant I le centre du cercle de rayon D (on se place dans le cas limite).

On a alors $\vec{T} = -T.\vec{e}_r$ et $\vec{IM} = D.\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = D\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -D\dot{\theta}^2.\vec{e}_r$ avec $v = v_0 = D\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{D} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{v_0^2}{D}.\vec{e}_r$

Par projection du PFD selon $\vec{e}_r$, on obtient $-m\frac{v_0^2}{D} = -T$.

Il faut que le virage soit serré mais pas trop car la réaction tangentielle des roues sur le sol ne doit pas dépasser la valeur limite $T = fN = fmg$ au delà de laquelle la voiture va déraper.

Dans le cas limite, on a donc $T = m\frac{v_0^2}{D} = fmg \Rightarrow D = \frac{v_0^2}{fg}$.

En conclusion : la voiture s'arrête à la distance $\frac{v_0^2}{2fg}$ de O (choix n°1) ou évite le mur sans freiner si il est à une distance supérieure à $\frac{v_0^2}{fg}$ deux fois plus grande.
Au moins de ne plus avoir de freins, il vaudra mieux écraser la pédale des freins plutôt de d'essayer d'éviter le mur infini.

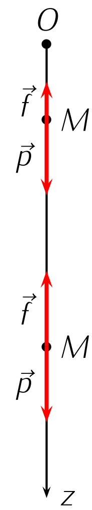
Exercice 5 : **Frottements quadratiques**

Un solide modélisé par un point matériel M de masse $m = 20$ kg est lâché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur uniforme.
L'air exerce sur lui une force de frottement opposée à la vitesse et de norme $f = \alpha v^2$ ($\alpha > 0$).

1. On constate que le solide atteint au bout d'un certain temps une vitesse limite constante $v_l = 45$ m.s^{-1}. Calculer α (on précisera bien son unité).
2. Au bout de combien de temps cette vitesse est-elle atteinte à 0,1 % près ?

On posera $u = v/v_l$ et on rappelle que $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{|1+u|}{|1-u|} + cte$.

1. Calcul de α.



Une fois lâché, M suit une trajectoire verticale, il atteint une vitesse constante quand son accélération est nulle c'est à dire quand la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle.

On choisit le référentiel lié au sol et considéré comme galiléen, le système est { le point M }.

L'origine du repère est la position initiale de M, on travaille en coordonnées cartésiennes, d'axe Oz vertical descendant (Cf. figure ci-contre).

Les forces appliquées sont le poids $\vec{p} = m\vec{g} = mg.\vec{e}_z$ et la force de frottement quadratiques $\vec{f} = -\alpha v.\vec{v} = -\alpha v^2.\vec{e}_z = -\alpha\dot{z}^2.\vec{e}_z$.

Lorsque la vitesse est $\vec{v} = v_l.\vec{e}_z$ constante, le système est en mouvement rectiligne uniforme et par application de la première loi de Newton (ou principe d'inertie), on a $\vec{p} + \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow mg - \alpha v_l^2 = 0 \rightarrow \alpha = \frac{mg}{v_l^2} = 9{,}7.10^{-2}$ N.m^{-2}.s^2 i.e kg.m^{-1}.

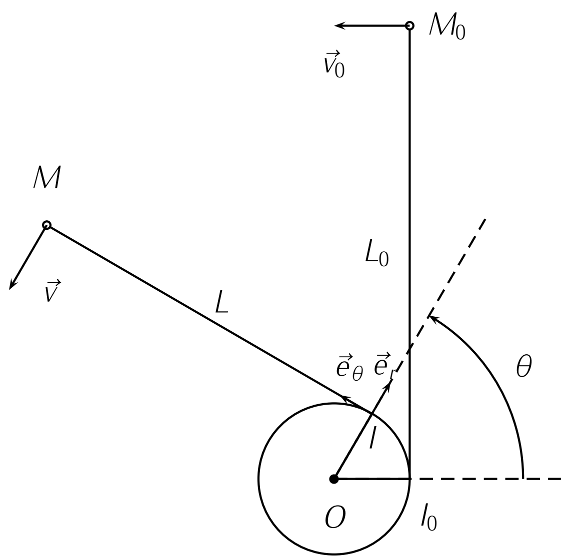
2. Avant d'atteindre la vitesse limite, par application de la seconde loi de Newton (principe fondamental de la dynamique : PFD), on a $m.\vec{a} = m.\ddot{z}.\vec{e}_z = \vec{p} + \vec{f}$ soit ici après projection selon $\vec{e}_z$, $m.\ddot{z} = mg - \alpha\dot{z}^2 = mg - mg\frac{\dot{z}^2}{v_l^2} \Rightarrow \ddot{z} = g(1 - \frac{\dot{z}^2}{v_l^2})$.

Comme on aboutit ici à une équation différentielle non linéaire, les indications de l'énoncé sont les bienvenues : on pose $\frac{v}{v_l} = \frac{\dot{z}}{v_l} = u$ et $\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = v_l.\frac{du}{dt}$ pour se ramener à l'équation

$$v_l.\frac{du}{dt} = g(1-u^2) \Rightarrow v_l.\frac{du}{1-u^2} = g.dt \Rightarrow \frac{1}{2}v_l.\ln\frac{1+u}{1-u} = gt \Rightarrow t = \frac{v_l}{2g}\ln\frac{1+u}{1-u}$$

Et en prenant $v = \frac{99}{100}v_l \iff u = 0{,}99$, on obtient $t = 17{,}4$ s.

Exercice 6 : **Enroulement d'un fil**



Un cylindre d'axe vertical et de rayon R, repose sur un plan horizontal.
On attache en un point I_0 du cylindre un fil sans masse qui peut s'enrouler autour de la base du cylindre (cercle de centre O). La longueur du fil est constante et égale à L_0.
L'autre extrémité du fil est fixée à un point matériel M de masse m glissant sans frottement sur le plan horizontal.
Le point M est initialement en M_0 tel que le fil soit tendu et tangent à la base en I_0. On communique alors au point M une vitesse $\vec{v}_0$, horizontale et perpendiculaire à la droite (I_0M_0).
On suppose que le fil reste tendu au cours du mouvement et on note $L(t)$ la longueur de la partie IM non enroulée du fil à l'instant t.
On donne $R = 0{,}2$ m ; $L_0 = 0{,}5$ m ; $m = 0{,}04$ kg et $v_0 = 0{,}1$ m.s^{-1}.
On travaillera dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ définie par la position du point I (Cf. figure ci-contre).

1. Donner la relation entre L, L_0, R et l'angle θ repérant la position du point I.
2. Calculer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, L_0, R et θ.
3. En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}$ du point matériel M à la date t, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
4. Montrer par utilisation du principe fondamental de la dynamique que $||\vec{v}|| = Cte$.
5. Déduire des questions 3. et 4. la relation entre $\dot{\theta}$, θ, L_0, R et v_0.

6. Exprimer θ en fonction de t, L_0, R et v_0.
7. Calculer t_f, la date à laquelle de fil est entièrement enroulé autour du cylindre.
   Faire l'application numérique.
8. Calculer la tension du fil T à la date t en fonction de t, m, L_0, R et v_0. Que se passe-t-il quand $t \to t_f$? Commenter.

1. $L_0 = L - R\theta$. 2. $\vec{OM} = R\vec{e}_r + (L_0 - R\theta)\vec{e}_\theta$. 3. $\vec{v} = -(L_0 - R\theta)\dot{\theta}\vec{e}_r$. 4. Par application du PFD dans la base polaire, on trouve $\frac{dv}{dt} = 0$ et $\vec{v} = -v_0\vec{e}_r$. 5. $\theta = \frac{1}{R}(L_0 - \sqrt{L_0^2 - 2Rv_0t})$. 6. $t_f = \frac{L_0^2}{2Rv_0}$. 7. $T = \frac{mv_0^2}{\sqrt{L_0^2 - 2Rv_0t}} \to \infty$ quand $t \to t_f$ le fil se rompt.