Corrigé du DL n° 2.

Exercice 1 1. Il s'agit d'étudier les fonctions sur $\mathbb{R}_+$

$$x \longmapsto x - \ln(1+x) \quad \text{et} \quad x \longmapsto -\frac{x}{x+1} + \ln(1+x).$$

Les dérivées ont respectivement pour expression

$$1 - \frac{1}{1+x} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{(1+x)^2} \geqslant 0$$

sur $\mathbb{R}_+$. Or, ces deux fonctions s'annulent en 0, d'où le résultat.

2. En posant $x = \frac{1}{k}$, c'est une conséquence immédiate de la question 1.

   En sommant ces inégalité pour k variant de 1 à n, on obtient pour tout $n > 0$

$$h_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant h_n.$$

   En remplaçant n par $n-1$ dans la première inégalité, on a

$$\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

3. On a pour tout entier $n > 0$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leqslant 0 \text{ par 1},$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \geqslant 0 \text{ par 1},$$
$$u_n - v_n = \frac{1}{n} > 0,$$

   et la dernière égalité prouve que la suite $(u_n - v_n)_n$ converge vers 0. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

4. Rappelons que si (w_n) est une suite, alors

$$w_n = o(1) \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} w_n = 0.$$

   Or, pour tout $n > 0$,

$$h_n - \ln(n) - \gamma = u_n - \gamma,$$

   qui converge vers 0 par définition de γ.

5. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc leur limite commune vérifie pour tout $n > 0$

$$v_n \leqslant \gamma \leqslant u_n,$$

   ce qui donne

$$0 \leqslant \varepsilon_n = u_n - \gamma \leqslant u_n - v_n = \frac{1}{n}.$$

   On en déduit que $n\varepsilon_n$ est borné (par 1), donc que $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, ou encore que

$$h_n = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

6. Comme $0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{n}$, une valeur approchée de γ à ε près est u_n pour

$$n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1,$$

   car alors

$$0 \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

   (Une valeur approchée de γ à 10^{-4} près est 0.5772).