Complexes - primitive et intégrale 1
DM 5

Exercice 1 : Des sommes, des complexes et de la trigonométrie

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Le but de l'exercice est de déterminer les valeurs des sommes A_n et B_n suivantes :

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$$

(on rappelle que la notation $\cos^2(kx)$ signifie $(\cos(kx))^2$).

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $Z_\theta = (1 - e^{i\theta})$ Montrez que $Z_\theta = e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i\sin\frac{\theta}{2})$
2. On considère $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$
   a) On suppose qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2m\pi$.
   Calculez C_n et S_n.
   b) On suppose maintenant que x ne s'écrit pas sous forme $x = 2m\pi$.
   Montrez que $C_n + iS_n$ est un quotient de deux nombres complexes de la forme Z_θ pour deux expressions de θ que vous préciserez.
   c) En déduire, toujours dans le cas où x ne s'écrit pas $2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, que

   $$C_n + iS_n = (\cos(\frac{n}{2}x) + i\sin(\frac{n}{2}x)) \times \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}$$

   et en déduire C_n et S_n.
3. a) Calculez $A_n + B_n$.
   b) Montrez que $A_n - B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx)$
   c) En déduire les valeurs de A_n et B_n en distinguant deux situations pour x.

---

1. On a $Z_\theta = (1 - e^{i\varphi}) = e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}}) = e^{i\frac{\varphi}{2}}(-2i\sin\frac{\varphi}{2})$ via les formules d'Euler.
2. a) Si x est un multiple de 2π, alors quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on a $\cos(kx) = 1$ et $\sin(kx) = 0$.
   Ainsi, $C_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$ et $S_n = 0$.
   b)
   $$\begin{aligned} C_n + iS_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\cos(kx) + i\sin(kx)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k \end{aligned}$$

   On reconnaît une série géométrique de raison e^{ix}, et $e^{ix} \neq 1$ car on a supposé x non multiple de 2π, d'où $C_n + iS_n = \frac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}}$.
   Finalement

   $$\boxed{C_n + iS_n = \frac{Z_{(n+1)x}}{Z_x}}$$

   c) On peut appliquer la formule obtenue en 1 avec $\theta = (n+1)x$ pour le numerateur, et $\theta = x$ pour le dénominateur)

   $$\begin{aligned} C_n + iS_n &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}(-2i\sin(\frac{n+1}{2}x))}{e^{i\frac{n}{2}x}(-2i\sin\frac{x}{2})} = e^{i\frac{n}{2}x}\frac{-2i\sin(\frac{n+1}{2}x)}{-2i\sin\frac{x}{2}} \\ &= (\cos(\frac{n}{2}x) + i\sin(\frac{n}{2}x)) \times \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

   Reste à comparer partie réelle et imaginaire et on a

   $$\boxed{C_n = \cos(\frac{n}{2}x)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}} \text{ et } S_n = \sin(\frac{n}{2}x)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}}$$

3. a) Comme pour tout $\theta \in \mathbb{C}$, $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$, on a directement

$$\boxed{A_n+B_n=n+1}$$

b) A nouveau, c'est une formule connue : $\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)=\cos(2\theta)$, d'où :

$$A_n-B_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)-\sin^2(kx)=\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx)$$

c) On peut trouver assez facilement que $A_n=\frac{1}{2}\left(A_n+B_n+A_n-B_n\right)$ et $B_n=\frac{1}{2}\left(A_n+B_n-(A_n-B_n)\right)$.
Il n'y a plus qu'à relier avec les résultats obtenus à la question 2, en remplaçant dans cette dernière x par $2x$, ce qui donne la valeur de A_n-B_n.
On obtient finalement :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } x \text{ est un multiple de } \pi,\ A_n=n+1 \text{ et } B_n=0\\[2ex] \text{si } x \text{ n'est pas multiple de } \pi,\\ A_n=\dfrac{n+1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos(nx)\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin x}\\ \text{et } B_n=\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos(nx)\dfrac{\sin((n+1)x)}{\sin x}\end{array}}$$

Exercice 2 : Intégrales de Wallis : intégrales et trigonométrie !

Le but du problème est de calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t dt \text{ et } J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t dt$$

1. A l'aide d'un changement de variable, montrez que $I_n=J_n$.
2. Calculez I_0, I_1, I_2 et I_3
3. En intégrant par partie, montrez que $nI_n=(n-1)I_{n-2}$.
4. En déduire par récurrence que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $I_{2p}=\frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}$.
5. Montrez que la suite (u_n) définie par $u_n=(nI_nI_{n-1})$ est constante. On précisera la valeur de cette constante.
6. En déduire une expression de I_{2p+1}.

---

1. On pose $t=\pi/2-u$. En faisant attention au fait que $du=-dt$ et en utilisant le fait que $\cos(\pi/2-u)=\sin(u)$, on obtient immédiatement $I_n=J_n$.
2. $I_0=\pi/2$ et $I_1=1$ sans difficulté.

   Pour I_2, on sait que $\cos(2t)=2\cos^2(t)-1$, donc $\cos^2(t)=\frac{1}{2}(\cos(2t)+1)$

   Ainsi, $I_2=\left[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(2t)+t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$

   Pour I_3, plusieurs techniques sont possibles.

   On peut par exemple écrire que $\cos^3 t=\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3$ pour obtenir, après développement via un joli binôme, $\cos^3 t=\frac{1}{4}(\cos(3t)+3\cos(t))$. On intègre ensuite et on trouve $\frac{2}{3}$.

   Moins brute : on peut aussi écrire $\cos^3(t)=\cos(t)\cos^2(t)=\cos(t)-\cos(t)\sin^2(t)$

   Le morceau $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)\sin^2(t)dx$ est de la forme $u'u^2$ avec $u=\sin(t)$, donc une primitive est $\frac{1}{3}(\sin^3(t))$.

   Alors $I_3=[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}[\sin^3(t)]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{3}$.
3. Soit $n\geq 1$. En écrivant que $(\cos t)^n=(\cos t)(\cos t)^{n-1}$ et en intégrant par partie avec $u(t)=(\cos t)^{n-1}$ et $v'(t)=\cos t$, donc $u'(t)=-(n-1)(\cos t)^{n-2}\sin t$ et $v(t)=\sin t$, on a

$$\begin{aligned} n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^n dt &= [n\sin t\cos(t)^{n-2}]_0^{\frac{pi}{2}}+n(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{n-2}\sin^2 t dt\\ &=0+n(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{n-2}dt-n(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^n dt\end{aligned}$$

En remplaçant $\sin^2 t$ par $1-\cos^2 t$ pour cette dernière égalité. On reconnait alors I_n et on a

$$nI_n + n(n-1)I_n = n(n-1)I_{n-2},$$

d'où, après factorisation et simplification :

$$\boxed{nI_n = (n-1)I_{n-2}}$$

4. On va procéder par récurrence sur p :
   Par récurrence sur p :
   Initialisation : la formule est valable pour $p=0$ d'après le calcul de la question 2.
   Hérédité : supposons que pour un certain $p \geq 1$, on a $I_{2(p-1)} = \dfrac{\pi(2(p-1))!}{2^{2(p-1)+1}((p-1)!)^2} = \dfrac{\pi(2p-2)!}{2^{2p-1}((p-1)!)^2}$.
   (ici, pour simplifier (un peu) les calculs, on suppose la formule vraie à $p-1$ et on va la montrer pour p)
   D'après la relation établie dans la question précédente avec $n=2p$, on a

$$\begin{aligned}
I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} I_{2(p-1)} \\
&= \frac{2p-1}{2p} \frac{\pi(2p-2)!}{2^{2p-1}((p-1)!)^2} \\
&= \frac{\pi(2p-1)!}{2 \times 2^{2p-1} p((p-1)!)^2} \\
&= \frac{2p\pi(2p-1)!}{2p \times 2 \times 2^{2p-1} p((p-1)!)^2} \\
&= \frac{\pi(2p)!}{2^{2p-1+2}(p(p-1)!)^2} \\
I_{2p} &= \frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}
\end{aligned}$$

   L'hérédité est vérifiée et le principe de récurrence garanti que la formule est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
5. Soit $n \geq 2$, alors $u_n = nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-2}I_{n-1} = u_{n-1}$. Donc la suite (u_n) est constante et vaut $u_1 = I_0 I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
6. Soit $p \geq 0$, alors $u_{2p+1} = (2p+1)I_{2p+1}I_{2p} = \dfrac{\pi}{2}$, d'où

$$I_{2p+1} = \frac{\pi}{2}/((2p+1)I_{2p}) = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!(2p+1)} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$