

# Séries entières

## I Séries entières de la variable complexe

### I. A Séries entières, rayon de convergence

**Notation :** Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r \in [0; +\infty[$ , on note

$$D_o(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \text{ et } D_f(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$

- si  $r \in ]0; +\infty[$ , alors  $D_o(z_0, r)$  et  $D_f(z_0, r)$  sont les disques ouverts et fermés de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ ;
- si  $r = +\infty$ , alors  $D_o(z_0, r) = D_f(z_0, r) = \mathbb{C}$ .

#### Définition 1.1

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

La **série entière de la variable complexe** associée à la suite  $a$  est la série de fonctions  $\sum f_n$  avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto a_n z^n$ , on la note  $\sum a_n z^n$ .

La **somme de la série entière** est la somme de la série de fonctions  $\sum f_n$ , c'est à dire la fonction  $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ .

**Remarque 1.2 :** Toute série entière  $\sum a_n z^n$  converge au moins pour  $z = 0$ , sa somme est alors  $a_0$ .

#### Théorème 1.3 (lemme d'Abel)

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière et  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

Si la suite  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| < |z_0|$ , la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.

#### Définition 1.4

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière. On appelle **rayon de convergence** de la série entière :

$$R_a = \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

où la borne supérieure est prise dans  $[0; +\infty[$ .

**Remarque 1.5 :** L'ensemble  $A = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide puisque  $0 \in A$ ,

- si  $A$  est majorée, alors  $R_a$  est bien défini dans  $[0; +\infty[$  d'après le théorème de la borne supérieure;
- si  $A$  n'est pas majorée,  $R_a = +\infty$ .

**Exemples 1.6 :** Rayon de convergence des séries :

$$\sum n^n z^n; \quad \sum z^n \quad \text{et} \quad \sum \frac{z^n}{n!}$$

#### Théorème 1.7

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R \in ]0; +\infty[$ .

- La série  $\sum a_n z^n$  converge absolument si  $|z| < R$ ;
- La série  $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement si  $|z| > R$ .

On appelle **disque ouvert de convergence** le disque  $D_o(0, R)$ .

**Attention :** Le théorème ne dit rien si  $|z| = R$ , c'est à dire sur le cercle.

**Remarque 1.8 :** • Si  $R = 0$ , alors  $\sum a_n z^n$  converge pour  $z = 0$  et diverge grossièrement sinon.

- Si  $R = +\infty$ , alors  $\sum a_n z^n$  converge absolument pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

### I. B Comparaison et exemples fondamentaux

#### Proposition 1.9

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence  $R_a$  et  $R_b$  respectivement.

- Si  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(b_n)$ , alors :  $R_a \geq R_b$ .
- Si  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$ , alors :  $R_a > R_b$ .
- Si à partir d'un certain rang,  $|a_n| \leq |b_n|$ , alors :  $R_a \geq R_b$ .
- Si  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ , alors :  $R_a = R_b$ .

#### Proposition 1.10

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le rayon de convergence de la série entière  $\sum n^\alpha x^n$  est 1.

**Exemples 1.11 :** Rayon de convergence des séries entières :

$$\sum \frac{z^n}{\sqrt{n^2 + 1}}; \quad \sum \frac{z^n}{n^2 + 1} \quad \text{et} \quad \sum \frac{z^n}{(3 + (-1)^n)^n}$$

## I. C Règle de d'Alembert

### Proposition 1.12

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière telle que  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in [0; +\infty[$ ,  
alors :  $R_a = \frac{1}{\ell}$  ( $R_a = 0$  si  $\ell = +\infty$  et  $R_a = +\infty$  si  $\ell = 0$ ).

**Exemple 1.13 :** Déterminer le rayon de convergence de la série entière :  $\sum \frac{n!(2n)!}{(3n)!} z^n$ .

## II Opérations sur les séries entières

### II. A Somme de deux séries entières

#### Théorème 2.1

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence  $R_a$  et  $R_b$  respectivement.

Alors le rayon de convergence  $R_s$  de la série  $\sum (a_n + b_n) z^n$  vérifie :  $R_s \geq \min(R_a, R_b)$ .  
Et pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

De plus, si  $R_a \neq R_b$ , alors  $R_s = \min(R_a, R_b)$ .

**Exemple 2.2 :** Pour  $\sum z^n$  et  $\sum \left(\frac{1}{n!} - 1\right) z^n$ , le rayon de convergence de la somme est strictement supérieur aux rayons de convergence des deux séries entières.

### II. B Produit de Cauchy de deux séries entières

#### Théorème 2.3

Soit  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence  $R_a$  et  $R_b$  respectivement.

Leur produit de Cauchy :

$$\sum_n \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right) z^n$$

est une série entière dont le rayon de convergence  $R_c$  vérifie :  $R_c \geq \min(R_a, R_b)$ .

De plus, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right) z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

**Attention :** Pour le produit de Cauchy,  $R_a \neq R_b \not\Rightarrow R_c = \min(R_a, R_b)$ .

**Contre exemple 2.4 :**  $\sum z^n$  et  $(1 - z)$

## III Étude sur le disque ouvert de convergence

### Théorème 3.1

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ .

Alors pour tout  $r \in [0; R[$ , la série entière converge normalement sur  $D_f(0, r)$  le disque fermé de centre 0 et de rayon  $r$ .

### Corollaire 3.2

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ .

Alors la somme de cette série entière est continue sur le disque ouvert de convergence.

**Attention :** On ne peut rien dire sur la continuité en un point du cercle limite où la série converge.

## IV Série entière de la variable réelle

### IV. A Définition

#### Définition 4.1

La **série entière de la variable réelle** associée à la suite (réelle ou complexe)  $a$  est la série de fonctions  $\sum g_n$  avec pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto a_n x^n$ , on la note  $\sum a_n x^n$ .

**Remarque 4.2 :** Il s'agit simplement de la restriction à  $\mathbb{R}$  de la série entière de la variable complexe. Les résultats des parties précédentes s'appliquent donc aux séries entières de la variable réelle.

En particulier, si la série entière  $\sum a_n z^n$  a pour rayon de convergence  $R$ , alors la série entière de la variable réelle  $\sum a_n x^n$  converge normalement sur tout segment de  $] -R; R[$  et diverge grossièrement en tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| > R$ .

L'intervalle  $] -R; R[$  est appelé **intervalle de convergence**.

## IV. B Théorème d'Abel radial

### Théorème 4.3

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de la variable réelle de rayon de convergence  $R \in \mathbb{R}_+^*$ .  
Si  $\sum a_n R^n$  converge, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

**Remarque 4.4 :** Dans ce cas, la fonction somme de la série entière de la variable réelle est continue en  $R$ .

Appliqué à la série entière de la variable complexe  $\sum a_n z^n$ , on en déduit que si  $|z_0| = R$  et  $\sum a_n z_0^n$  converge, alors la restriction de la somme  $S$  au rayon  $[0; z_0]$  est continue en  $z_0$ . Par contre la fonction somme  $S$  n'est pas nécessairement continue en  $z_0$  : un voisinage relatif au disque fermé n'est pas inclus dans le rayon.

## IV. C Dérivation d'une série entière

### Théorème 4.5

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de la variable réelle de rayon de convergence  $R$  et de somme  $S$ .

Alors, la série entière  $\sum n a_n x^{n-1}$  a le même rayon de convergence  $R$ ,  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R; R[$  et les dérivées successives de  $S$  s'obtiennent par dérivation termes à termes :

$$\forall x \in ] -R; R[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

**Exemples 4.6 :** 1. Calcul de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ .

2. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ .

En déduire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

3. Montrer que :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ .

## IV. D Expression des coefficients

### Théorème 4.7

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence  $R > 0$ .  
Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

### Corollaire 4.8

Soit  $\sum a_n x^n$  et  $\sum b_n x^n$  deux séries entières de la variable réelle de rayons de convergence strictement positif.

Si les fonctions sommes  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  coïncident sur un intervalle  $]0; \alpha[$  avec  $\alpha > 0$ ,  
alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$ .

## V Développement en série entière

### V. A Fonctions développables en série entière

#### Définition 5.1

Une fonction  $f$  de la variable complexe définie sur le disque  $D_o(0, r)$  avec  $r > 0$  est dite **développable en série entière** sur  $D_o(0, r)$  lorsqu'elle est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur à  $r$  :

$$\forall z \in D_o(0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Une fonction  $f$  de la variable réelle définie sur l'intervalle  $] -r; r[$  est dite **développable en série entière** sur  $] -r; r[$  lorsqu'elle est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur à  $r$  :

$$\forall x \in ] -r; r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

**Remarque 5.2 :** Dans le cas réel, si  $f$  est développable en série entière sur  $] -r; r[$ , alors elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -r; r[$  et la série entière est sa série de Taylor :

$$\forall x \in ] -r; r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

**Attention :** Si  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -r; r[$ , elle n'est pas nécessairement développable en série entière :

- sa série de Taylor peut avoir un rayon de convergence nul;
- sa série de Taylor peut converger vers une autre fonction.

**Exemple 5.3 :** La fonction  $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0; \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ .

## V. B Développements usuels pour la variable complexe

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (R = +\infty)$$

$$\forall z \in D_o(0, 1), \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \text{ et } \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n \quad (R = 1)$$

**Remarque 5.4 :** On en déduit que la fonction exponentielle complexe  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est continue sur  $\mathbb{C}$ .

## V. C Développements usuels pour la variable réelle

### 1) de rayon de convergence $R = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R} :$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

### 2) de rayon de convergence $R = 1$

$\forall x \in ]-1; 1[ :$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n; \quad \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n; \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}; \quad \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

## 3) Méthodes

Pour montrer qu'une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $] -R; R[$  est développable en série entière, on peut :

- Utiliser les développements en série entière usuels.

**Exemples 5.5 :** – cf les fonctions hyperboliques et trigonométriques;

– la fonction  $x \mapsto \frac{1}{ax+b}$  avec  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ;

– la fonction  $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ .

**Remarque 5.6 :** Soit  $f$  fraction rationnelle qui n'admet pas 0 comme pôle et  $r > 0$  tel que  $] -r; r[$  ne contient aucun pôle de  $f$ , alors  $f$  est décomposable en série entière sur  $] -r; r[$ .

- Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange, si :

$$\forall x \in ]-R; R[, \frac{|x|^n}{(n)!} \left\| f^{(n)} \right\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

En particulier s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que :

$$\forall x \in ]-R; R[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M.$$

**Exemple 5.7 :** Traiter le cas de la fonction exponentielle réelle (exercice).

- Appliquer la méthode de l'équation différentielle : montrer que  $f$  est solution d'un problème de Cauchy linéaire de la forme :

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x), & \forall x \in ]-R; R[; \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

dont est également solution sa série de Taylor.

**Exemple 5.8 :** Fonction  $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ .