Corrigé du DS 4

Exercice

Q1. **bien définie** pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(A)$ existe comme maximum d'un ensemble finie de sommes finies de nombres positifs. Donc N est bien définie et à valeurs positives.

séparation soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = 0$,

donc, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!], 0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant N(A) = 0$,

donc : $\forall i \in [\![1\,;n]\!], \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 0$ somme nulle de nombres positifs,

donc $\forall i,j \in [\![1\,;n]\!], |a_{i,j} = 0|$, donc $A = 0$.

homogénéité soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
N(\lambda A) &= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}| \\
&= \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda|\,|a_{i,j}| \\
&= \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \\
&= |\lambda| \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}| \qquad \text{(car } |\lambda| \geqslant 0\text{)} \\
&= |\lambda|\, N(A)
\end{aligned}$$

inégalité triangulaire soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1\,;n]\!], \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \text{ (inégalité triangulaire pour } |\ |\text{)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \\
&\leqslant N(A) + N(B)
\end{aligned}$$

Donc :

$$N(A+B) = \max_{i\in[\![1\,;n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant N(A) + N(B).$$

Conclusion :

$$\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Q2. Soit $X \in S$ et $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$. Donc : $\forall j \in [\![1\,;n]\!], |x_j| \leqslant 1$ et

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1\,;n]\!], |[AX]_i| &= \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \qquad (i^{\text{ième}} \text{ coefficient de } AX) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \\
&\leqslant N(A)
\end{aligned}$$

donc : $\|AX\|_\infty \leqslant N(A)$.
Donc :

$$\boxed{\forall X \in S, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leqslant N(A)}$$

Donc : l'ensemble $\{\|AX\|_\infty\,; X \in S\}$ est une partie non vide (S est non vide) et majorée par $N(A)$, donc d'après le théorème de la borne supérieure,

$$\boxed{\sup_{X\in S} \|AX\|_\infty \text{ existe.}}$$

Q3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, donc $\frac{X}{\|X\|_\infty} \in S$, donc :

$$\left\| A \times \left(\frac{1}{\|X\|_\infty} X \right) \right\| \leqslant \|\!|A|\!\|$$

donc : $\frac{1}{\|X\|_\infty} \|AX\|_\infty \leqslant \|\!|A|\!\|$, donc :

$$\|AX\|_\infty \leqslant \|\!|A|\!\| \times \|X\|_\infty\,.$$

De plus pour $X = 0_{n,1}$, $\|AX\|_\infty = 0 \leqslant \|\!|A|\!\| \times \|X\|_\infty$.
Donc :

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leqslant \|\!|A|\!\| \|X\|_\infty.}$$

Q4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; d'après **Q2**, $N(A)$ est un majorant de l'ensemble $\{\|AX\|_\infty\,; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$, donc :

$$\|\!|A|\!\| = \sup \{\|AX\|_\infty\,; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\} \leqslant N(A).$$

De plus pour $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = \max_{i\in[\![1\,;n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = N(A);$$

on pose pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{i_0,j} \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } a_{i_0,j} < 0. \end{cases}$$

Donc : $\|X\|_\infty = 1$ et

$$\begin{aligned} [AX]_{i_0} &= \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j && (i_0{}^{\text{ième}} \text{ coefficient de } AX) \\ &= \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \\ &= N(A) \end{aligned}$$

Donc : $\|AX\|_\infty \geqslant N(A)$. Donc :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\| = N(A).}$$

Q5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$\|A\| = N(A) = \max(|2| + |0| + |-1|\,, |3| + |-2| + |3|\,, |5| + |0| + |1|) = 8$.
Donc

$$\boxed{\|A\| = 8.}$$

Problème : CCINP MP 2020 maths 1

Partie 1 : Développement ternaire

Q6. Montrons que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

- On a tout d'abord $\ell^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- La suite nulle étant bornée, elle appartient bien à ℓ^∞ ;
- Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de ℓ^∞, bornées respectivement par M_u et M_v et λ, μ deux réels, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|\lambda u_n + \mu v_n| \leqslant |\lambda| M_u + |\mu| M_v$$
ce qui montre que $\lambda u + \mu v$ est bornée, donc dans ℓ^∞.

Ainsi, par caractérisation des sous-espaces vectoriels, ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc

$$\boxed{\ell^\infty \text{ est un espace vectoriel réel.}}$$

Montrons maintenant que $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞ :

- **bien définie** : si $u \in \ell^\infty$,
$$\{|u_n|, n \in \mathbb{N}^*\}$$
est une partie non vide (elle contient $|u_1|$) et majorée (puisque u est bornée) de $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la borne supérieure, $\|u\|$ existe.
- **Séparation** : si $u \in \ell^\infty$ est telle que $\|u\| = 0$, cela veut dire que $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n| = 0$, donc que 0 majore tous les $|u_n|$, qui sont des nombres positifs. On a donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| = 0$$
donc u est la suite nulle.
- **Inégalité triangulaire** : soit $u, v \in \ell^\infty$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n| \leqslant \|u\| + \|v\|$$
donc la quantité $\|u\| + \|v\|$ est un majorant de l'ensemble $\{|u_n + v_n|; n \in \mathbb{N}\}$, donc :
$$\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$
- **Homogénéité** : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \ell^\infty$.
$$\|\lambda u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda u_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda|\,|u_n| = |\lambda|\,\|u\|$$

Donc

$$\boxed{u \mapsto \|u\| \text{ est une norme sur } \ell^\infty.}$$

Q7. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, bornée par M. Alors, on a
$$0 \leqslant \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \frac{M}{3^n}.$$
Or, $\frac{M}{3^n}$ est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison dans $]0\,;1[$) ; par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge donc absolument, donc converge.

$$\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge.}}$$

Q8. Montrons tout d'abord que σ est bien une forme linéaire sur ℓ^∞. σ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a alors
$$\sigma(\lambda u + \mu v) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda u_n + \mu v_n)}{3^n} = \lambda \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}\right) + \mu \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n}\right) = \lambda\sigma(u) + \mu\sigma(v)$$
par linéarité de la somme d'une série (notons que cette égalité est justifiée par le fait que toutes les séries qui interviennent convergent bien d'après la question précédente). Ainsi, σ est linéaire, et σ est donc bien une forme linéaire.

Montrons maintenant que σ est continue. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors :
$$\|\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{3^n}\| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{|u_n|}{3^n} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n}\right) \|u\|$$
Le terme de gauche de cette inégalité converge vers $\|\sigma(u)\|$, celui de droite converge également car la série de terme général $\frac{1}{3^n}$ converge, pour les mêmes raisons qu'à la question 2. Par conséquent, on peut passer à la limite lorsque $N \to +\infty$, et :
$$\|\sigma(u)\| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\right) \|u\|$$
et d'après une caractérisation de la continuité des applications linéaires, cela montre que

$$\boxed{\sigma \text{ est une forme linéaire continue sur } \ell^\infty.}$$

Q9. Soit $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$. Notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \frac{t_n}{3^n} \leqslant \frac{2}{3^n}$, donc
$$0 \leqslant \sigma(t) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$$

et cette dernière somme de série vaut 1 car, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{3^n} = 2\frac{1-3^{-N}}{2} \to 1$$

Donc

$$\boxed{\text{si } t \in T, \text{ alors } \sigma(t) \in [0\,;1].}$$

Q10. On a

$$\sigma(\tau) = \frac{\tau_1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

et

$$\sigma(\tau') = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Donc :

$$\boxed{\sigma(\tau) = \sigma(\tau') = \tfrac{1}{3} \text{ et } \tau \neq \tau', \text{ donc l'application } \sigma \text{ n'est pas injective sur } T.}$$

Q11. Il s'agit de montrer que $t(x)$ est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, t_n(x)$ est un entier relatif comme différence d'entiers relatifs. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$3^n x - 1 < \lfloor 3^n x \rfloor \leqslant 3^n x$$

et

$$3^{n-1} x - 1 < \left\lfloor 3^{n-1} x \right\rfloor \leqslant 3^{n-1} x$$

donc

$$-3^n x \leqslant -3 \left\lfloor 3^{n-1} x \right\rfloor < -3^n x + 3$$

d'où (à chaque fois on somme une inégalité large et une inégalité stricte, donc on a bien une inégalité stricte)

$$3^n x - 1 - 3(3^{n-1} x) = -1 < t_n(x) < 3^n x - 3(3^{n-1} x - 1) = 3$$

Et puisque $t_n(x)$ est entier, on a bien $t_n(x) \in \{0, 1, 2\}$. Donc

$$\boxed{t(x) \in T.}$$

Q12. Tout d'abord, $y_n - x_n = \frac{1}{3^n} \to 0$. De plus, pour $n \geqslant 2$,

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} - \frac{\left\lfloor 3^{n-1} x \right\rfloor}{3^{n-1}} = \frac{t_n(x)}{3^n} \geqslant 0$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, et, pour $n \geqslant 2$,

$$y_n - y_{n-1} = \frac{t_n(x)}{3^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{t_n(x) - 2}{3^n} \leqslant 0$$

donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Ainsi,

$$\boxed{\text{les suites } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes.}}$$

Puisqu'on a l'encadrement, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$3^n x - 1 \leqslant \lfloor 3^n x \rfloor \leqslant 3^n x$$

on a donc

$$1 - \frac{1}{3^n} \leqslant x_n \leqslant 1$$

et par théorème d'encadrement,

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge donc vers } x \text{ et } (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ de même}}$$

puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Par ailleurs, pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{t_n(x)}{3^n} &= \frac{t_1(x)}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{t_{n+1}(x)}{3^{n+1}} \\
&= \frac{\lfloor 3x \rfloor}{3} - \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{N} (x_{n+1} - x_n) \\
&= x_1 - 0 + x_{N+1} - x_1 \\
&= x_{N+1}
\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n} = x}$$

Soit $x \in [0\,;1[$, alors $t = t(x) \in T$ et

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n}{3^n} = \sigma(t)$$

donc $x \in \sigma(T)$.
De plus, soit $u = (2)_{n\in\mathbb{N}^*}$, donc $u \in T$ et

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$$

donc $1 \in \sigma(T)$. De plus $\forall t \in T, \sigma(t) \in [0\,;1]$, donc :

$$\boxed{\sigma \text{ est sujective de } T \text{ dans } [0\,;1].}$$

Partie 2 : Étude d'une fonction définie par une série

Q13. Notons $f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1+\sin(nx)}{3^n} \end{array} \right.$.

Les f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ comme composition, somme et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme sin varie entre -1 et 1, $\|f_n\|_\infty = \frac{2}{3^n}$. Par ailleurs, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2}{3^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3}$). Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc simplement, sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ donc $\|f\|_\infty = \frac{n}{3^n}$. Or, $\frac{n}{3^n} = o\left(\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ par croissance comparée. Comme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série positive et convergente (c'est une série de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1), par comparaison, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{3^n}$ converge. Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de dérivation d'une série,

$$\boxed{\varphi \text{ est donc bien définie sur } \mathbb{R} \text{ et est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Q14. Notons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left|\frac{e^{inx}}{3^n}\right| \leqslant \frac{1}{3^n}$$

De même que dans la question 2, la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{inx}}{3^n}$ converge donc simplement. Notamment, sa partie imaginaire converge simplement. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ (fixé pour le reste de la question) :

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n}$$

D'autre part, par le même calcul qu'à la question 4,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$$

On obtient donc bien

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{1}{2} + \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)$$

Donc

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{2} + \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right).}$$

Enfin, par somme d'une série géométrique convergente et de raison différente de 1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n} = \frac{e^{ix}}{3\left(1 - \frac{e^{ix}}{3}\right)} = \frac{e^{ix}\left(1 - \frac{e^{-ix}}{3}\right)}{3\left(\left(1 - \frac{\cos(x)}{3}\right)^2 + \frac{\sin^2(x)}{9}\right)} = \frac{3e^{ix} - 1}{10 - 6\cos(x)}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}.}$$

Q15. La question **Q13** nous a permis de vérifier le théorème de dérivation d'une série de fonctions terme à terme. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$$

D'autre part, en dérivant à vue l'expression obtenue à la question précédente, on trouve que, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \frac{3\cos(x)(10 - 6\cos(x)) - 3\sin(x)6\sin(x)}{(10 - 6\cos(x))^2} = \frac{-18 + 30\cos(x)}{(10 - 6\cos(x))^2}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{-18 + 30\cos(x)}{(10 - 6\cos(x))^2}.}$$

Q16. On a montré en question **Q13** que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Cette série converge donc uniformément. Par ailleurs, les f_n, étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sont notamment continues sur $[0, \pi]$. Par théorème d'intégration d'une série terme à terme :

$$\int_0^\pi \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^\pi f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

donc

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{x}{3^n} - \frac{\cos(nx)}{n3^n}\right]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{3^n} + \frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^n}\right)$$

Or, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{3^n} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\pi}{2}$ et d'après la question **Q14**

$$\int_0^\pi \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1}{2} + \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + 3\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} + 3\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^{n+1}}.}$$

Enfin, par développement en série entière, on a, pour tout $x \in]-1;1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, donc

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\ln\left(1+\frac{1}{3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\ln(2)$$

Q17. Avec le changement de variable (licite, car de classe $\mathcal{C}^1$ $u = \cos(x)$ et $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$), on obtient que

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1} \frac{-1}{10-6u}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{6}\ln(10-6u)\right]_1^{-1} = \frac{1}{3}\ln(2)$$

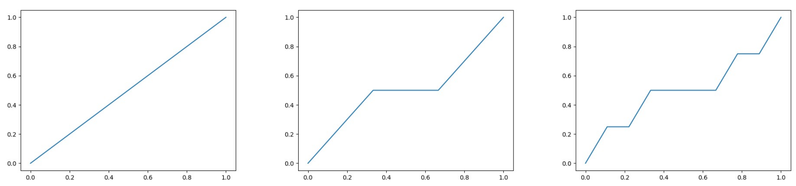
Partie 3 : Développements ternaires aléatoires

Partie 4 : Fonction de Cantor-Lebesgue

Q18. On a :

$$\forall x \in [0,1], f_0(x) = x$$

On en déduit le graphiques respectifs de f_0, puis ceux de f_1 et f_2 par opérations sur les représentations graphiques (dilatations, translations) :



Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(N) : f_n([0\,;1]) \subset [0\,;1].$$

Initialisation : pour $n = 0$.
$f_0 : x \mapsto x$, donc $f_0([0\,;1]) = [0\,;1]$, d'où $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$. Soit $x \in [0\,;1]$

1^er cas : $x \leqslant \frac{1}{3}$, donc $f_{n+1}(x) = \frac{f_n(3x)}{2}$, or $3x \in [0\,;1]$, donc par hypothèse de récurrence, $f_n(3x) \in [0\,;1]$, donc $f_{n+1}(x) \in [0\,;\frac{1}{2}] \subset [0\,;1]$.

2^ième cas : $x \in]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}[$, donc $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \in [0\,;1]$.

3^ième cas : $x \geqslant \frac{2}{3}$, donc $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(3x-2}{2}$, or $x \in [\frac{2}{3}\,;1]$, donc $3x-2 \in [0\,;1]$ et d'après l'hypothèse de récurrence, $f_n(3x-2) \in [0\,;1]$, donc : $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(3x-2}{2} \in [\frac{1}{2}\,;1] \subset [0\,;1]$.

Donc : $\forall x \in [0\,;1], f_{n+1}(x) \in [0\,;1]$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : par principe de récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est à valeur dans } [0\,;1].}$$

Q19.
```
def cantor(n,x):
    if n == 0:
        return x
    elif x <= 1 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x) / 2
    elif x >= 2 / 3:
        return cantor( n - 1, 3 * x - 2) / 2 + 1 /2
    else:
        return 1 / 2
```

Q20. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(n) : \forall x \in [0,1], |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}$$

Initialisation pour $n = 0$

- Si $x \in [0\,;\frac{1}{3}]$, alors
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{6}$$
- Si $x \in]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}[$, alors $|f_1(x) - f_0(x)| = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Si $x \geqslant \frac{1}{2}$, on a donc
$$|f_1(x) - f_0(x)| = x - \frac{1}{2} \leqslant \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
D'autre part, si $x < \frac{1}{2}$, on a
$$|f_1(x) - f_0(x)| = \frac{1}{2} - x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

- Si $x \in [\frac{2}{3}\,;1]$, alors

$$\begin{aligned}|f_1(x) - f_0(x)| &= \left|\frac{1}{2} + \frac{3x-2}{2} - x\right| \\ &= \frac{1}{2}|x-1| = \frac{1}{2}(1-x) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

- Si $x \in [0\,;\frac{1}{3}]$, alors

$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x) - f_n(3x)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{3 \times 2^{n+1}} = \frac{1}{3 \times 2^{n+2}}$$

- Si $x \in]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}[$, alors
$$|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| = 0$$

- Si $x \in [\frac{2}{3}\,;1]$, alors

$$\begin{aligned}|f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x)| &= \frac{1}{2}|f_{n+1}(3x-2) - f_n(3x-2)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{3 \times 2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3 \times 2^{n+2}}\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}.}$$

Q21. La série de terme général $\frac{1}{3 \times 2^n}$ converge en tant que série géométrique de raison dans $]0\,;1[$. D'après la question précédente, la série de fonctions $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge donc normalement sur $[0,1]$, donc uniformément sur $[0,1]$. Par lien suite-série, la suite de fonctions $(f_n - f_0)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $[0,1]$, et il en va donc de même pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0\,;1].}$$

Q22. Montrons que la propriété $\mathcal{P}(n)$: f_n est continue et croissante sur $[0,1]$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $n = 0$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie car $f_0 = \mathrm{Id}$ qui est bien continue, croissante sur $[0,1]$, et vaut bien 0 en 0 et 1 en 1.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$.

Alors f_{n+1} est continue sur $[0\,;\frac{1}{3}],]\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}[$ et $[\frac{2}{3}\,;1]$ comme somme, quotient et composition de fonctions continues. Par ailleurs,

$$f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f_{n+1}(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}^-} \frac{f_n(3x)}{2} = \frac{f_n(1)}{2} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f_{n+1}(x)$$

donc f_{n+1} est continue en $\frac{1}{3}$. On montre de la même manière que f_{n+1} est continue en $\frac{2}{3}$. Donc f_{n+1} est continue sur $[0,1]$.

Comme composée de fonctions croissantes, f_{n+1} est également croissante sur chacun des intervalles $[0\,;\frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}\,;1]$, et elle est constante donc croissante sur $[\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}]$. Comme cette croissance a lieu sur chaque intervalle fermé, on peut « recoller » cette croissance sur tout $[0,1]$:

par exemple si $x \in [0\,;\frac{1}{3}]$ et $y \in [\frac{2}{3}\,;1]$, on a $f_{n+1}(x) \leqslant f_{n+1}\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant f_{n+1}\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant f_{n+1}(y)$).

Enfin, $f_{n+1}(0) = \frac{f_n(3\times 0)}{2} = 0$ et $f_{n+1}(1) = \frac{1}{2} + \frac{f_n(3\times 1-2)}{2} = 1$.

Conclusion : par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$$

En passant à la limite en n, on trouve que pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

La fonction f est donc bien à valeurs dans $[0,1]$. Par ailleurs, si $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f_n(x) \leqslant f_n(y)$$
et là encore, en passant à la limite en n, on obtient

$$f(x) \leqslant f(y)$$

La fonction f est donc croissante, et en passant à la limite dans les égalités $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$, on obtient $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Puisque f est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $[0,1]$, elle est elle-même continue sur $[0,1]$. Enfin, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f\left([0\,;1]\right)$ est un intervalle contenant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, donc il contient $[0\,;1]$, et f est donc surjective.