Devoir Surveillé n° 4.
le 29 novembre.

les calculatrices sont interdites.

Exercice

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.
Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note :

$$N(A) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

Q1. Démontrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par :

$$\|X\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|\,.$$

On note S la sphère unité définie par : $S = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty = 1\}$.

Q2. Démontrer que $\forall X \in S, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leqslant N(A)$.
En déduire, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'existence de $\sup\limits_{X\in S} \|AX\|_\infty$.
On pose alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = \sup\limits_{X\in S} \|AX\|_\infty$.

Q3. Démontrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leqslant |||A||| \|X\|_\infty$.

Q4. Démontrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |||A||| = N(A)$.

Q5. Application. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $|||A|||$.

Problème

Objectifs
L'objectif de la **partie I** est de montrer l'existence d'un développement ternaire propre pour certains nombres réels. La **partie II** propose l'étude d'une série de fonctions où les coefficients du développement ternaire sont remplacés par une fonction continue. La **partie III** étudie des développements ternaires aléatoires : *(non traitée ici)*. La **partie IV** définit et présente quelques propriétés de la fonction de Cantor-Lebesgue

Notations
On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.
On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornées et on pose $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$.
On note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y.

Partie I - Développement ternaire

Étude de l'application σ

Q6. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que $u \mapsto \|u\|$ est une norme sur ℓ^∞.

Q7. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, montrer que la série de terme général $\dfrac{u_n}{3^n}$ est convergente. On note :

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}.$$

Q8. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

Q9. Démontrer que si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0, 1]$.

Q10. On note $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les éléments de T définis par :

$$\tau_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tau_n = 0 \qquad ; \qquad \tau'_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tau'_n = 2.$$

Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

Développement ternaire propre

On fixe $x \in [0, 1[$. On définit une suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_n(x) = \lfloor 3^n x \rfloor - 3 \lfloor 3^{n-1} x \rfloor .$$

Q11. Démontrer que $t(x) \in T$.

Q12. On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{3^n}.$$

Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire que :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}.$$

Que peut-on en conclure concernant l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & [0,1] \\ u & \longmapsto & \sigma(u) \end{array} \right.$?

La suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée développement ternaire propre de x.

Partie II - Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie, on définit une fonction φ à l'aide d'un développement en série analogue au développement ternaire propre d'un réel, mais où la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est remplacée par une fonction numérique à valeurs dans l'intervalle $[0,2]$.

Pour tout réel x on pose :

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\sin(nx)}{3^n}.$$

Étude de l'application φ

Q13. Démontrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Q14. Pour tout x réel, justifier l'écriture : $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}+\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{3^n}\right)$.

En déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Q15. Pour $x\in\mathbb{R}$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

Q16. À l'aide de $\displaystyle\int_0^{\pi}\varphi(x)dx$ démontrer que :

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n3^{n+1}}.$$

Puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(x)}{10-6\cos(x)}dx$.

Indication LVH : on pourra utiliser $\forall x\in\,]-1\,;1[,\ \ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$

Q17. Retrouver la valeur de cette intégrale par un calcul direct.

Partie III - Développements ternaires aléatoires

Partie IV - Fonction de Cantor-Lebesgue

Dans cette partie, on va définir et étudier la fonction de Cantor-Lebesgue.

Étude d'une suite de fonctions

On note f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0(x)=x$. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$\forall x\in[0,1],\ f_{n+1}(x)=\begin{cases}\dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]\\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{si } x\in\left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right[\\[2mm] \dfrac{1}{2}+\dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x\in\left[\frac{2}{3},1\right]\end{cases}.$$

Q18. Représenter l'allure graphique des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur trois schémas différents (pour f_2 on envisagera sept sous-intervalles de $[0,1]$).

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, démontrer que f_n est à valeurs dans $[0,1]$.

Q19. *Informatique : MP* Écrire en langage Python une fonction récursive `cantor(n,x)` qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.

Q20. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, démontrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}.$$

Q21. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

La limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée f.
On l'appelle fonction de Cantor-Lebesgue.

Q22. Démontrer que la fonction f est à valeurs dans $[0,1]$ et qu'elle est croissante et continue sur $[0,1]$. Démontrer aussi qu'elle est surjective de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

La fonction f est aussi nommée « escalier du diable ». Les développements ternaires étudiés en début de problème permettent d'obtenir une expression analytique de $f(x)$.