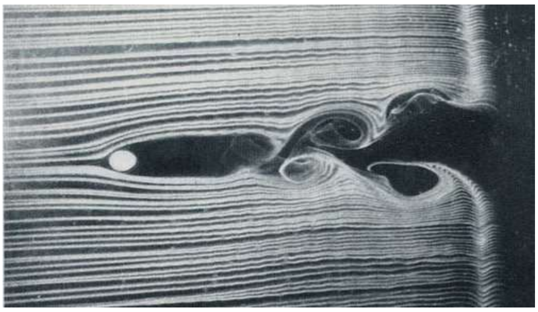
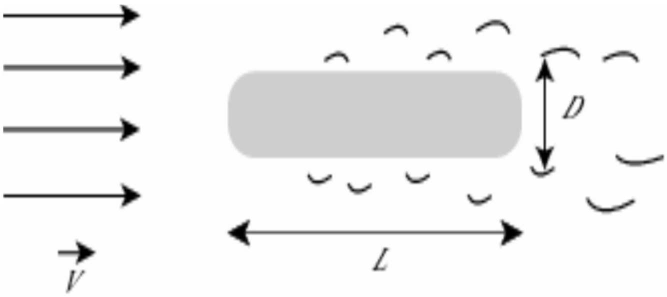
**4.5 Forces dans les fluides-Exercice 3**

Un corps de section transverse de largeur D et de longueur L, placé dans l'écoulement d'un fluide incompressible à vitesse uniforme V, peut développer dans son sillage des tourbillons qui se détachent régulièrement à la fréquence $\omega$ (allée de tourbillons de Von Karman). La structure élastique du corps peut alors se mettre à vibrer en résonance à la fréquence de forçage $\omega$, et conduire à un endommagement de la structure.

On considère en illustration la structure d'un pont piétonnier d'épaisseur D = 0,1 m et de longueur transverse L = 0,3 m, et l'on veut connaître pour une vitesse du vent V = 50 km/h la fréquence $\omega$ correspondante de l'allée de tourbillons. On prend pour masse volumique et viscosité dynamique de l'air respectivement $\mu = 1{,}23\ kg.m^{-3}$ et $\eta = 1{,}8.10^{-5}\ kg.m^{-1}.s^{-1}$. Les grandeurs caractéristiques du problème sont les longueurs D et L du corps, la vitesse V, la masse volumique $\mu$ et la viscosité dynamique $\eta$ du fluide. La fréquence $\omega$ doit donc être une fonction de ces grandeurs : $\omega = f(D,L,V,\mu,\eta)$






a-Ecrire les équations aux dimensions de $\omega$, D, L, V, $\mu$, $\eta$.

b-Le *« théorème $\pi$ » de Buckingham* dit qu'une relation homogène $g_1 = f(g_2, g_3,\dots g_n)$ entre n grandeurs physiques s'exprimant en fonction des trois dimensions fondamentales L (longueur), T (temps), M (masse), peut être remplacée par une relation $\pi_1 = F(\pi_2,\pi_3,\dots,\pi_{n-3})$ entre n – 3 nombres $\pi_m$ sans dimension.

- Que vaut n pour le problème étudié ? Combien de nombres sans dimension caractérisent le problème ?
- Construire un premier nombre sans dimension $\pi_1$ à partir de deux des grandeurs physiques.
- Déterminer $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ pour construire un deuxième nombre sans dimension de la forme $\pi_2 = \eta.D^{\alpha}.V^{\beta}.\mu^{\gamma}$.
- Déterminer $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ pour construire un troisième nombre sans dimension de la forme $\pi_3 = \omega.D^{\alpha}.V^{\beta}.\mu^{\gamma}$.

c-Un modèle (maquette) est une représentation d'un système physique qu'on peut utiliser pour prévoir le comportement d'un prototype dans certaines conditions.
Le prototype vérifie une relation $\pi_1 = F(\pi_2,\pi_3,\dots)$ entre les grandeurs sans dimension du problème.
Une relation semblable $\pi_{1m} = F(\pi_{2m},\pi_{3m},\dots)$ doit aussi être vérifiée pour le modèle. Si l'on choisit l'égalité des valeurs des grandeurs adimensionnées du modèle et du prototype : $\pi_2 = \pi_{2m}$ , $\pi_3 = \pi_{3m}$ , …, alors $\pi_1 = \pi_{1m}$ et la mesure de $\pi_{1m}$ sur le modèle permet de prédire la valeur de $\pi_1$ sur le prototype. C'est la *condition de similitude* : tous les termes adimensionnés correspondants entre modèle et prototype doivent être égaux.

Une maquette du pont de dimension $D_m = 20$ mm est testée dans un tunnel à eau. On mesure une fréquence des tourbillons $\omega_m = 50$ Hz. On prend pour masse volumique et viscosité dynamique de l'eau respectivement $\mu_m = 10^{3}\ kg.m^{-3}$ et $\eta_m = 1{,}12.10^{-3}\ kg.m^{-1}.s^{-1}$ .

- Déterminer la dimension $L_m$ de la maquette.
- Déterminer la vitesse de l'eau dans le modèle. A quelle vitesse faudrait-il souffler si l'expérience modèle était faite dans l'air ?
- Déduire la fréquence des tourbillons sur le prototype.

**4.5 Forces dans les fluides-Exercice 3**

---

a- $\boxed{[\omega] = T^{-1} \quad ; \quad [D] = L \quad ; \quad [L] = L \quad ; \quad [V] = L.T^{-1} \quad ; \quad [\mu] = M.L^{-3} \quad ; \quad [\eta] = M.L^{-1}.T^{-1}}$

b-• Il y a <u>n = 6 grandeurs physiques</u>. On peut construire 6 – 3 = <u>3 nombres sans dimension</u>.

- Par exemple : $\boxed{\pi_1 = \dfrac{L}{D}}$
- $\pi_2 = \eta.D^{\alpha}.V^{\beta}.\mu^{\gamma}$ => $[\pi_2] = M.L^{-1}.T^{-1}.L^{\alpha}.L^{\beta}.T^{-\beta}.M^{\gamma}.L^{-3\gamma}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + \gamma \\ 0 = -1 + \alpha + \beta - 3\gamma \\ 0 = -1 - \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = -1$$

Donc : $\boxed{\pi_2 = \dfrac{\eta}{\mu V D} = \dfrac{1}{R_e}}$

- $\pi_3 = \omega.D^{\alpha}.V^{\beta}.\mu^{\gamma}$ => $[\pi_2] = T^{-1}.L^{\alpha}.L^{\beta}.T^{-\beta}.M^{\gamma}.L^{-3\gamma}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \gamma \\ 0 = \alpha + \beta - 3\gamma \\ 0 = -1 - \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = 1 \text{ et } \beta = -1$$

Donc : $\boxed{\pi_3 = \dfrac{\omega D}{V}}$

c-• $\pi_1 = \pi_{1m}$ => $\dfrac{L}{D} = \dfrac{L_m}{D_m}$ => $L_m = D_m \dfrac{L}{D}$ A.N : <u>$L_m$ = 6 cm</u>

- $\pi_2 = \pi_{2m}$ => $\dfrac{\eta}{\mu V D} = \dfrac{\eta_m}{\mu_m V_m D_m}$ => $V_m = V \dfrac{\mu D \eta_m}{\mu_m D_m \eta}$ A.N : <u>$V_m$ = 19 km/h</u>

  Si $\eta = \eta_m$ et $\mu = \mu_m$, alors : $V_m = V \dfrac{D}{D_m}$ A.N : <u>$V_m$ = 250 km/h</u> L'écoulement de l'air serait compressible.

- $\pi_3 = \pi_{3m}$ => $\dfrac{\omega D}{V} = \dfrac{\omega_m D_m}{V_m}$ => $\omega = \omega_m \dfrac{V D_m}{V_m D}$ A.N : avec $\omega_m$ = 50 Hz on trouve <u>$\omega$ = 26 Hz</u>

---