4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 9

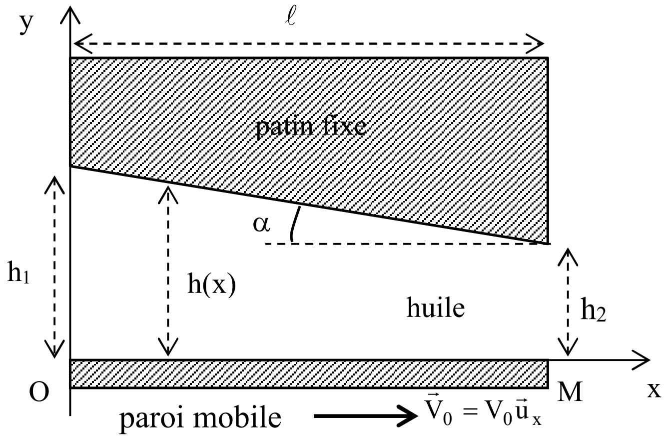
L'arbre vertical d'une machine tournante est solidaire d'un disque tournant à faible distance d'un disque fixe muni d'une couronne de patins inclinés. L'espace compris entre les disques est rempli de lubrifiant. On cherche à étudier le rôle et le fonctionnement du « coin d'huile » qui se forme entre chaque patin et le disque.
On adopte la configuration idéalisée ci-dessous.

La paroi mobile se déplace à la vitesse constante : $\vec{V}_0 = V_0\vec{u}_x$ ($V_0 > 0$)

On note L la profondeur du système selon Oz et on néglige les effets de bord de sorte que l'écoulement est supposé bidimensionnel dans le plan Oxy. On suppose l'angle α petit.

Le lubrifiant est un fluide newtonien incompressible de masse volumique μ et de viscosité η, en écoulement stationnaire. Le champ de vitesse est de la forme : $\vec{v} = v_x(x,y)\vec{u}_x + v_y(x,y)\vec{u}_y$

On donne : $h_1 = 2h_2 = 0{,}06$ mm ; $L = \ell = 5$ cm ; $V_0 = 15\ m.s^{-1}$; $\mu = 900\ kg.m^{-3}$; $\eta = 0{,}01$ Pl



1-Ecrire la condition d'incompressibilité de l'écoulement.

2-On désigne par V_t une échelle de vitesse transversale et par h_t une hauteur moyenne du film.
En évaluant les ordres de grandeurs de $\left|\frac{\partial v_x}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial v_y}{\partial y}\right|$, montrer que $\vec{v} \approx v_x(x,y)\vec{u}_x$.

3-Ecrire l'équation de Navier-Stokes. Pourquoi peut-on négliger les forces de pesanteur ?

4-Comparer les ordres de grandeur de $\left|\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right|$ et $\left|\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right|$, puis de $\left|\mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right|$ et $\left|\eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right|$.
En déduire une expression simplifiée de l'équation de Navier-Stokes.

5-Montrer que la pression est uniquement fonction de x. On posera $\frac{dP(x)}{dx} = K(x)$.

6-Déterminer le champ de vitesse $v_x(x,y)$.

7-Exprimer le débit volumique à travers une section droite en fonction de η, $K(x)$, V_0, L et $h(x)$.
Ce débit volumique se conserve-t-il ? Pourquoi ?

8-On admet que la pression au niveau des sections d'entrée et de sortie est égale à la pression ambiante P_0.
Exprimer $P(x) - P_0$ en fonction de η, V_0, $\tan\alpha$, $h(x)$, h_1 et q_v.

9-Montrer alors que le débit volumique se calcule par : $q_v = \frac{1}{2}LV_0h^*$ avec $h^* = \frac{2h_1h_2}{h_1+h_2}$.

4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 9

On a alors : $P(x) - P_0 = \dfrac{3\eta V_0 h^*}{\tan\alpha}\left(\dfrac{1}{h(x)} - \dfrac{1}{h_1}\right)\left(\dfrac{1}{h_2} - \dfrac{1}{h(x)}\right)$

Donner l'allure des variations de $P(x) - P_0$ en fonction de x.

10-Donner sous forme intégrale les expressions de la résultante F_y des forces de pression et de la résultante F_x des forces de viscosité exercées sur le fluide par la portion OM de la paroi mobile.

En introduisant la variable sans dimension $\beta = h_1/h_2$, on obtient :

$$F_y = \frac{6\eta L V_0 \ell^2}{h_2^2(\beta-1)^2}\left[\mathrm{Ln}\beta - 2\frac{\beta-1}{\beta+1}\right] \quad \text{et} \quad F_x = \frac{6\eta L V_0 \ell^2 \tan\alpha}{h_2^2(\beta-1)^2}\left[\frac{2}{3}\mathrm{Ln}\beta - \frac{\beta-1}{\beta+1}\right]$$

Calculer les valeurs de F_y et de F_x. Définir et calculer le coefficient de frottement f. Commentaire.

4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 9

1-Incompressibilité => $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ => $\boxed{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0}$

2-On en déduit : $\left|\dfrac{\partial v_x}{\partial x}\right| = \left|\dfrac{\partial v_y}{\partial y}\right|$ Or : $\left|\dfrac{\partial v_x}{\partial x}\right| \approx \dfrac{V_0}{\ell}$ et $\left|\dfrac{\partial v_y}{\partial y}\right| \approx \dfrac{V_t}{h_t}$ d'où : $V_t \approx V_0 \dfrac{h_t}{\ell}$

On a $h_t \approx 0{,}05$ mm << $\ell = 5$ cm donc : $V_t << V_0$

On peut donc supposer $v_y << v_x$ et écrire : $\boxed{\vec{v} \approx v_x(x,y)\vec{u}_x}$

3-On néglige la pesanteur car on a une très mince couche de fluide.

Equation de Navier-Stokes : $\mu(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}P(M) + \eta\Delta\vec{v}(M)$

En projection selon Ox : $\mu v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \eta\left(\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)$ En projection selon Oy : $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial y}$

4-$\left|\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right| \approx \dfrac{V_0}{\ell^2}$ et $\left|\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right| \approx \dfrac{V_0}{h_t^2}$ $h_t << \ell$ => $\boxed{\left|\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right| >> \left|\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right|}$

$\left|\mu v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x}\right| \approx \dfrac{\mu V_0^2}{\ell} \approx 4{,}5.10^6$ et $\left|\eta\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right| \approx \dfrac{\eta V_0}{h_t^2} \approx 4.10^7$ donc : $\boxed{\left|\mu v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x}\right| << \left|\eta\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right|}$

Equation de Navier-Stokes simplifiée : $\boxed{0 = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$

5-$0 = -\dfrac{\partial P}{\partial y}$ => P ne dépend pas de y mais que de x

6-$\eta\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \dfrac{dP}{dx}$ => $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \dfrac{K(x)}{\eta}$ => $v_x = \dfrac{K(x)}{2\eta}y^2 + Ay + B$

Conditions aux limites : $v_x(0) = V_0 = B$

$$v_x(h) = 0 = \frac{K(x)}{2\eta}h^2 + Ah + V_0 \quad => \quad A = -\frac{V_0}{h} - \frac{K(x)}{2\eta}h$$

Donc : $\boxed{v_x(x,y) = \dfrac{K(x)}{2\eta}(y^2 - hy) + V_0(1 - \dfrac{y}{h})}$

7-$q_v = \displaystyle\iint_{\text{section}} v_x(x,y)dydz = \int_0^h [\frac{K(x)}{2\eta}(y^2 - hy) + V_0(1-\frac{y}{h})]dy \int_0^L dz = L[\frac{K(x)}{2\eta}(\frac{h^3}{3} - h\frac{h^2}{2}) + V_0(h - \frac{h^2}{2h})]$

Donc : $q_v = L[-\dfrac{K(x)}{12\eta}h^3 + V_0\dfrac{h}{2}]$ ou encore : $\boxed{q_v = \dfrac{1}{2}Lh[V_0 - \dfrac{K(x)}{6\eta}h^2]}$

Le débit volumique se conserve car l'écoulement est incompressible.

8-A partir de l'expression de q_v : $K(x) = \dfrac{dP}{dx} = 6\eta(\dfrac{V_0}{h^2} - \dfrac{2q_v}{Lh^3})$ => $dP = 6\eta(\dfrac{V_0}{h^2} - \dfrac{2q_v}{Lh^3})dx$

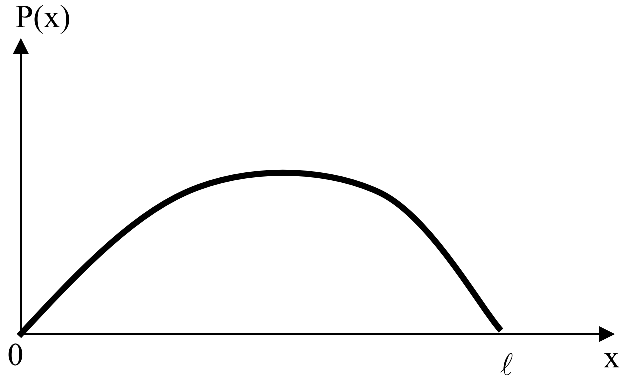
Or : $h = h_1 - x\tan\alpha$ => $dx = -\dfrac{dh}{\tan\alpha}$ => $dP = -6\eta(\dfrac{V_0}{h^2} - \dfrac{2q_v}{Lh^3})\dfrac{dh}{\tan\alpha}$

On intègre entre h_1 et h : $\boxed{P(x) - P_0 = \dfrac{6\eta}{\tan\alpha}[V_0(\dfrac{1}{h} - \dfrac{1}{h_1}) - \dfrac{q_v}{L}(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{1}{h_1^2})]}$

4.6 Ecoulements visqueux-Exercice 9

9-En prenant $h = h_2$ où $P(\ell) = P_0$, la relation précédente donne : $0 = \frac{6\eta}{\tan\alpha}[V_0(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}) - \frac{q_v}{L}(\frac{1}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2})]$

Soit : $0 = V_0 - \frac{q_v}{L}(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_1})$ D'où : $\boxed{q_v = \frac{1}{2}LV_0h^* \quad \text{avec } h^* = \frac{2h_1h_2}{h_1+h_2}}$



10- $\boxed{F_y = \iint_{plaque} P(x)dxdz = L\int_0^{\ell} P(x)dx}$ et $\boxed{F_x = \iint_{plaque} -\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}(x,0)dxdz = L\int_0^{\ell} -\eta\frac{\partial v_x}{\partial y}(x,0)dx}$

A.N : $F_y = 3310$ N ; $F_x = 10$ N

Coefficient de frottement d'après la loi de Coulomb : $f = \frac{F_x}{F_y}$ A.N : $\underline{f = 3.10^{-3}}$

Cette valeur est beaucoup plus faible que celle sans lubrifiant (f de l'ordre de 0,4)
