Exercice 1 : Chariots élévateurs à bateaux

Question 1 : *Déterminer l'expression de x_{Gc}, abscisse du centre de gravité du contrepoids, pour que G et O soient confondus.*

$$(m_T + m_1 + m_C).\overrightarrow{OG} = m_T.\overrightarrow{OG_T} + m_1.\overrightarrow{OG_1} + m_C.\overrightarrow{OG_C}$$

G étant confondu avec le point O, on a donc en projection sur $\vec{x}_1$:

$$0 = m_T.x_{G_T} + m_1.x_{G_1} + m_C.x_{G_C} \qquad \boxed{x_{G_C} = \frac{-m_T.x_{G_T} - m_1.x_{G_1}}{m_C}}$$

Question 2 : *Justifier que l'on peut considérer le problème comme plan.*

Le problème peut être considéré comme plan car dans cette première modélisation, le plan $(O_0, \overrightarrow{x_1}, \vec{z}_1)$ est un plan de symétrie de la géométrie et la répartition des actions mécaniques. De plus, toutes les actions mécaniques sont des forces contenues dans des plans $(\overrightarrow{x_1}, \vec{z}_1)$.

Question 3 : *Déterminer la résultante dynamique de l'ensemble {Σ,B}, dans son mouvement par rapport à R_0.*

Résultante dynamique : $\overrightarrow{R_{d\Sigma B/R_0}} = (M + m_B)\overrightarrow{\Gamma_{G\in\Sigma N/R_0}} = -(M + m_B)dec_x.\vec{x}_1$ *(à la limite du basculement)*

Question 4 : *Déterminer le moment dynamique :*

a. *Déterminer le moment dynamique de l'ensemble {Σ} dans son mouvement par rapport à R_0, en O puis en I_4 ;*

$\overrightarrow{\sigma_{O,\Sigma/R_0}} = [II_O(\Sigma)]\overrightarrow{\Omega_{\Sigma/R_0}} = \vec{0}$ car O=G centre d'inertie de {Σ} et $\overrightarrow{\Omega_{\Sigma/R_1}} = \vec{0}$

$\overrightarrow{\delta_{O,\Sigma/R_0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,\Sigma/R_0}}}{dt}\right]_{R_0} = \vec{0}$ car O=G centre d'inertie de {Σ}

$$\overrightarrow{\delta_{I_4,\Sigma/R_1}} = \overrightarrow{\delta_{O,\Sigma/R_1}} + \overrightarrow{I_4O} \wedge -Mdec_x\overrightarrow{x_1} = -\left(\frac{-2L}{3}\overrightarrow{x_1} - E\overrightarrow{y_1} + h\overrightarrow{z_1}\right) \wedge Mdec_x\overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{I_4,\Sigma/R_1}} = -EMdec_x\overrightarrow{z_1} - h.M.dec_x\overrightarrow{y_1}$$

b. *Déterminer le moment dynamique de l'ensemble {B} dans son mouvement par rapport à R_0, en G_B puis en I_4 ;*

$\overrightarrow{\sigma_{G_B,B/R_0}} = \left[I_{G_B,B}\right]\overrightarrow{\omega_{B/R_0}} = \vec{0}$ car G_B centre d'inertie de $\{B\}$

$\overrightarrow{\delta_{G_B,B/R_0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G_B,B/R_0}}}{dt}\right]_{R_0} = \vec{0}$ car G_B centre d'inertie de $\{B\}$

$$\overrightarrow{\delta_{I_4,B/R_1}} = \overrightarrow{\delta_{G_B,B/R_1}} - \overrightarrow{I_4G_B} \wedge m_Bdec_x\overrightarrow{x_1} = -\left[\left(x_{G_B} - \frac{2L}{3}\right)\overrightarrow{x_1} - E\overrightarrow{y_1} + \left(z_{G_B} + h\right)\overrightarrow{z_1}\right] \wedge m_Bdec_x\overrightarrow{x_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{I_4,B/R_1}} = -\left(z_{G_B} + h\right).m_B.dec_x\overrightarrow{y_1} - Em_Bdec_x\overrightarrow{z_1}$$

c. *En déduire moment dynamique de l'ensemble {Σ,B}, en I_4 dans son mouvement par rapport à R_0.*

$$\overrightarrow{\delta_{I_4,\{\Sigma,B\}/R_0}} = \overrightarrow{\delta_{I_4,B/R_0}} + \overrightarrow{\delta_{I_4,\Sigma/R_0}} = -EMdec_x\overrightarrow{z_1} - h.M.dec_x\overrightarrow{y_1} - \left(z_{G_B} + h\right).m_B.dec_x\overrightarrow{y_1} - Em_Bdec_x\overrightarrow{z_1}$$

Question 5 : *Écrire les équations issues de l'application du principe fondamental de la dynamique à l'ensemble {Σ,B}. Le théorème du moment dynamique sera appliqué au point* $\boldsymbol{I_4}$.

On isole $\{\Sigma, B\}$.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Poids du bateau (force connue) : $\{\mathcal{T}_{\vec{g}\to B}\} = {}_{G_B}\begin{Bmatrix} -m_B.g.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- Poids de Σ (force connue) : $\{\mathcal{T}_{\vec{g}\to \Sigma}\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} -M.g.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$
- Action du sol sur chaque roue (2 forces de direction et norme inconnues)

$$\{T_{sol\to P_{12}}\} = \begin{Bmatrix} -T_{12}.\vec{x}_1 + N_{12}.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_{12}} \text{ et } \{T_{sol\to P_{34}}\} = \begin{Bmatrix} -T_{34}.\vec{x}_1 + N_{34}.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_{34}}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel R_0 supposé galiléen :

- Le théorème de la résultante dynamique :

$$-\left(M + m_B\right).dec_x\overrightarrow{x_1} = -T_{12}\overrightarrow{x_1} + N_{12}\overrightarrow{z_1} - T_{34}\overrightarrow{x_1} + N_{34}\overrightarrow{z_1} - \left(M + m_B\right)g\overrightarrow{z_1}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} /\overrightarrow{x_1} : -\left(M + m_B\right).dec_x = -T_{12} - T_{34} \\ /\overrightarrow{z_1} : 0 = N_{12} + N_{34} - \left(M + m_B\right)g \end{array}}$$

- Le théorème du moment dynamique en I_4 en projection sur $\vec{y}_1$(car le problème est plan) :

<u>Calcul des moments en I_4 et projection sur $\vec{y}_1$:</u>

$\overrightarrow{M_{I_4,\vec{g}\to B}}.\vec{y}_1 = \left(\overrightarrow{I_4G_B} \wedge -m_B.g.\vec{z}_1\right).\vec{y}_1 = \left(x_{G_B} - \frac{2L}{3}\right)m_B.g$

$\overrightarrow{M_{I_4,\vec{g}\to \Sigma}}.\vec{y}_1 = \left(\overrightarrow{I_4O} \wedge -M.g.\vec{z}_1\right).\vec{y}_1 = -\frac{2L}{3}.M.g$

$\overrightarrow{M_{I_4,sol\to P_{34}}}.\vec{y}_1 = 0$

$\overrightarrow{M_{I_4,sol\to P_{12}}}.\vec{y}_1 = L.N_{12}$

<u>Soit finalement :</u> $\boxed{-dec_x\left(h.(M + m_B). + z_{G_B}.m_B\right) = \left(x_{G_B} - \frac{2L}{3}\right)m_Bg - \frac{2L}{3}Mg + L\left(N_{12}\right)}$

Question 6 : *Identifier le nombre d'inconnues et le nombre d'équations. Peut-on résoudre ? Donner les hypothèses qui peuvent être faites afin de réduire le nombre d'inconnues du problème.*

En considérant le problème plan et les symétries, on obtient donc 3 équations scalaires pour 4 inconnues (N_{12}, N_{34}, T_{12}, T_{34}) voir 5 si on ne connait pas dec_x.

Pour résoudre, soit on se place à la limite du décollement des roues arrières (ou limite du glissement), on aura ainsi $N_{12} = T_{12} = 0$. Au final, des 3 équations précédentes, 2 seront utiles pour déterminer les actions inconnues du sol sur le chariot. La dernière permettra de déterminer la décélération limite pour obtenir le décollement.

Ou pour résoudre, on se place à la limite du glissement aux deux points de contact et d'après la loi de Coulomb : $T_{12} = f \times N_{12}$ et $T_{34} = f \times N_{34}$, on aura donc 5 inconnues et 5 équations, on peut résoudre.

On considère que le basculement a lieu lorsque les roues arrière perdent le contact avec le sol.

Question 7 : *Déterminer l'expression de dec_x en fonction des données de l'énoncé et en tenant compte des hypothèses précédentes.*

En prenant l'équation issue du moment dynamique, et $N_{12} = 0$ (limite du décollement des roues arrières, on obtient la décélération maximale avant décollement :

$$\boxed{-dec_x = \frac{\left(x_{G_B} - \frac{2L}{3}\right)m_B g - \frac{2L}{3}Mg}{(M+m_B).h + m_B.z_{G_B}}}$$

Le facteur d'adhérence entre le pneu et la route est noté f.

Question 8 : *Donner les expressions de $\boldsymbol{N_4}$ et $\boldsymbol{T_4}$ et expliquer qualitativement comment vérifier que le basculement a lieu avant le glissement afin de justifier l'hypothèse faite en début d'étude.*

Par symétrie, on a $N_4 = \frac{N_{34}}{2}$ et $T_4 = \frac{N_{34}}{2}$

On se place à la limite du basculement. Ainsi $\mathrm{T}_{12} = \mathrm{N}_{12} = 0$.

Les équations de la résultante dynamique s'écrivent donc :

$$-(M+m_B).dec_x\overrightarrow{x_1} = \left(-2.\mathrm{T}_4\overrightarrow{x_1} + 2.\mathrm{N}_4\overrightarrow{z_1}\right) - (M+m_B)g\overrightarrow{z_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -(\mathrm{M}+\mathrm{m}_\mathrm{B}).\mathrm{dec}_\mathrm{x} = -\mathrm{T}_{34} \\ 0 = \mathrm{N}_{34} - (\mathrm{M}+\mathrm{m}_\mathrm{B})\mathrm{g} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} T_4 = \dfrac{(M+m_B)dec_x}{2} \\ N_4 = \dfrac{(M+m_B)g}{2} \end{cases}}$$

Pour finir, il suffit de comparer le rapport $\frac{T_4}{N_4}$ avec f :

$\frac{T_4}{N_4} = \frac{dec_x}{g}$ donc si $\frac{dec_x}{g} \langle f$ le basculement aura lieu avant le glissement. Sinon, ce sera l'inverse.

Question 9 : *Simplifier (en le justifiant) la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble $\{\Sigma, B\}$.*

Le plan $(G_{\Sigma B}, \overrightarrow{x_1}, \vec{z}_1)$ est un plan de symétrie matériel de l'ensemble {Σ,B}, les produits d'inertie faisant intervenir $\vec{y}_1$ sont donc nuls :

$$\mathbb{I}(G_{\Sigma B}, \{\Sigma, B\}) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{R_1}$$

Question 10 : *À partir du théorème du moment dynamique appliqué au système {Σ,B}, écrit en I_2, déterminer l'expression de V qui provoque le basculement latéral.*

On isole l'ensemble $\{\Sigma, B\}$.

Bilan des AME :

- Poids de $\{\Sigma, B\}$: $\{T_{poids}\} = \begin{Bmatrix} -(M+m_B)g.\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_{\Sigma B}}$
- Action du sol sur chaque roue i

<u>Théorème du moment dynamique en I_2</u>

$$\vec{M}_{I_2,poids} + \vec{M}_{I_2,sol\to roue1} + \vec{M}_{I_2,sol\to roue2} + \vec{M}_{I_2,sol\to roue3} + \vec{M}_{I_2,sol\to roue4} = \vec{\delta}_{I_2,\Sigma B/R_0}$$

Calcul des moments des actions mécaniques en I_2

- $\vec{M}_{I_2,poids} = \overrightarrow{I_2G_{\Sigma B}} \wedge (-(M+m_B)g.\vec{z}_1)$

  $\vec{M}_{I_2,poids} = -(M+m_B)g.\left(-\left(\frac{L}{3}+x_{G\Sigma B}\right)\vec{y}_1 + (E+y_{G\Sigma B})\vec{x}_1\right)$

  $\overrightarrow{I_2G_{\Sigma B}} = \overrightarrow{I_2O} + \overrightarrow{OG_{\Sigma B}} = \left(\frac{L}{3}+x_{G_{\Sigma B}}\right)\overrightarrow{x_1} + \left(E+y_{G_{\Sigma B}}\right)\overrightarrow{y_1} + \left(h+z_{G_{\Sigma B}}\right)\overrightarrow{z_1}$

- $\vec{M}_{I_2,sol\rightarrow rouei} = \overrightarrow{I_2I_i} \wedge (T_i.\vec{y}_1 + N_i.\vec{z}_1)$ avec $\overrightarrow{I_2I_i} = a\vec{x}_1 + b\vec{y}_1 + c\vec{z}_1$

  $\vec{M}_{I_2,sol\rightarrow rouei} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ T_i \\ N_i \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} b.N_i - c.T_i \\ -a.N_i \\ a.T_i \end{pmatrix}_{R_1}$

  donc $\vec{M}_{I_2,sol\rightarrow roue1} = 2EN_1.\vec{x}_1$ et $\vec{M}_{I_2,sol\rightarrow roue2} = \vec{0}$

  $\vec{M}_{I_2,sol\rightarrow roue3} = -L.N_3.\vec{y}_1 + L.T_3.\vec{z}_1$

  $\vec{M}_{I_2,sol\rightarrow roue4} = 2E.N_4.\vec{x}_1 - L.N_4.\vec{y}_1 + L.T_4.\vec{z}_1$

Calcul du moment cinétique :

$$\overrightarrow{\sigma_{G_{\Sigma B},\{\Sigma,B\}/R_0}} = \left[\mathrm{II}_{G_{\Sigma B},\{\Sigma,B\}}\right]\overrightarrow{\Omega_{\{\Sigma,B\}}} = \left[\mathrm{II}_{G_{\Sigma B},\{\Sigma,B\}}\right]\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G_{\Sigma B},\{\Sigma,B\}/R_0}} = \dot{\alpha}\left(-E_1\overrightarrow{x_1} + C_1\overrightarrow{z_0}\right)$$

Calcul du moment dynamique : $\dot{\alpha}$ est constant

$$\overrightarrow{\delta_{G_{\Sigma B}\{\Sigma,B\}/R_0}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G_{\Sigma B}\{\Sigma,B\}/R_0}}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{\alpha}\left(-E_1\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}\right)$$

$$\overrightarrow{\delta_{I_2,\{\Sigma,B\}/R_0}} = \overrightarrow{\delta_{G_{\Sigma B}\{\Sigma,B\}/R_0}} + \overrightarrow{I_2G_{\Sigma B}} \wedge (M+m_B)V\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{I_2,\{\Sigma,B\}/R_0}}.\overrightarrow{x_1} = -E_1\dot{\alpha}^2\overrightarrow{y_1} + (M+m_B).V\dot{\alpha}\left[\left(\frac{L}{3}+x_{G_{\Sigma B}}\right)\overrightarrow{z_1} - \left(h+z_{G_{\Sigma B}}\right)\overrightarrow{x_1}\right]$$

Le théorème du moment donne les 3 équations suivantes (projection dans R_1) :

$$2EN_1 + 2E.N_4 - (M+m_B)g(E+y_{G\Sigma B}) = -(M+m_B)V.\dot{\alpha}(h+z_{G\Sigma B})$$

$$-L.N_3 - L.N_4 + (M+m_B)g\left(\frac{L}{3}+x_{G\Sigma B}\right) = -E_1.\dot{\alpha}^2$$

$$L.T_3 + L.T_4 = (M+m_B)V.\dot{\alpha}\left(\frac{L}{3}+x_{G\Sigma B}\right)$$

L'ensemble $\{\Sigma, B\}$ risque de basculer autour de l'axe $\left(I_{2,}\overrightarrow{x_1}\right)$. Il faut donc écrire l'équation du moment dynamique autour de cet axe.

À vitesse V constante, avec $V = \rho.\dot{\alpha}$, et en prenant $N_1 = N_4 = 0$ (limite de basculement),

$$-(M+m_B)g(E+y_{G\Sigma B}) = -(M+m_B)V.\frac{V}{\rho}(h+z_{G\Sigma B})$$

La vitesse limite du basculement latéral est donc: $\boxed{V = \sqrt{\rho g \frac{E + y_{G_{\Sigma B}}}{h + z_{G_{\Sigma B}}}}}$