Exercices

Exercice 1. On souhaite démontrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
On suppose qu'il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
On note A l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$.
En introduisant l'antécédent q de A, aboutir à une contradiction. Conclure.

Exercice 2. On dispose de 4 pièces de monnaie dont une truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile est $\frac{4}{5}$. On choisit une pièce au hasard et on obtient pile. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce truquée ?

Exercice 3. Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps vérifie les règles suivantes : si l'appareil fonctionne à la date n ($n \in \mathbb{N}$), la probabilité qu'il fonctionne à la date $n+1$ est $p = 0,8$; si l'appareil tombe en panne à la date n ($n \in \mathbb{N}$), la probabilité qu'il soit en panne à la date $n+1$ est $q = 0,4$. On note p_n la probabilité de l'événement M_n : « l'appareil est en état de marche à la date n ».

1. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite (p_n) et en déduire l'expression de p_n en fonction de n sachant que l'appareil est en état de marche à l'instant 0. Vérifier pour $n = 0$ et $n = 1$.
2. Etudier la limite ℓ de (p_n) et interpréter ce résultat.
3. Déterminer un rang n_0 à partir duquel on a $|p_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Exercice 4. Soit $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$.
On effectue des lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir Face est p.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « Au cours des n premiers lancers, Face n'est jamais suivi de Pile ». Montrer que
$$P(A_n) = \begin{cases} \frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{n+1}{2^n} & \text{si } p = \frac{1}{2}. \end{cases}.$$
2. Déterminer la limite lorsque le nombre de lancers tends vers l'infini.

Exercice 5. Une dactylo immortelle tape tous les jours 100 000 caractères de façon complètement aléatoire sur un clavier de 50 touches. Donner la probabilité que cette dactylo tape un jour l'intégralité des *Misérables* (on suppose que le livre contient exactement 100 000 caratères et que l'on a besoin uniquement de ces 50 touches pour taper ce livre).

Exercice 6. On tire au hasard un nombre entier strictement positif.
On supose qu'on obtient n avec la probabilité $\frac{1}{2^n}$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note A_k l'événement « l'entier tiré est un multiple de k. »
   Donner la probabilité de A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$ et celle de $A_2 \cup A_3$.
3. On note B l'événement « l'entier tiré est un nombre premier ».
   Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de B.

Exercice 7. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Étant donnés des événements indépendants A_i où $i \in [\![1, n]\!]$, montrer que la probabilité pour qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à : $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$.
Application : On joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce équilibrée.
Montrer que la probabilité de n'obtenir que des piles est nulle.

Exercice 8. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Deux joueurs A et B s'affrontent en des parties indépendantes. Le joueur A dispose d'une fortune égale à n euros tandis que le joueur B dispose de $N - n$ euros. À chaque tour, le joueur A a la probabilité $p \in]0, 1[$ de l'emporter et le joueur B a la probabilité complémentaire $q = 1 - p$. Le joueur perdant cède alors un euro au vainqueur. Le jeu continue jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs.
On note a_n la probabilité que le joueur A l'emporte lorsque sa fortune initiale vaut n.

1. Que valent a_0 et a_N ? Établir la formule de récurrence :
$$\forall n \in [\![1, N-1]\!],\ a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}.$$
2. En déduire que la suite $(u_n)_{1 \leqslant n \leqslant N-1}$ définie par $u_n = a_n - a_{n-1}$ est géométrique.
3. Calculer a_n en distinguant les cas $p = q$ et $p \neq q$.
4. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

Exercice 9. Paradoxe des trois portes.
Dans un jeu télévisé, un joueur est placé devant trois portes cachant une voiture et deux chèvres. Il désigne une porte qui reste fermée. Le présentateur ouvre l'une des deux autres portes pour faire apparaitre une chèvre. Le joueur a alors la possibilité de changer d'avis ou garder la porte choisie initialement. Que doit-il faire ? Calculer ses chances de succès suivant les trois stratégies suivantes :

- il change de porte ;
- il reste sur la même porte ;
- il choisit une des deux portes au hasard.

Exercice 10. Deux archers tirent chacun son tour sur une cible. Le premier qui touche la cible a gagné. Le tireur qui commence a, à chaque tour, la probabilité $p_1 > 0$ de toucher la cible et le second la proabilité $p_2 > 0$.

1. Quelle est la probabilité que le premier tireur gagne ?
2. Montrer qu'il es presque sûr que le jeu se termine.
3. On suppose que $p_2 = \frac{3}{2}p_1$. Pour quelle valeurs de p_1 et p_2 le jeu est-il équitable ?

Exercice 11. On considère N coffres. Avec une probabilité p, un trésor a été placé dans l'un des coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre.

Exercice 12. Produit eulérien
Soit $s > 1$ et un espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mathrm{P})$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s} \text{ avec } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = n\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que P est une probabilité et calculer $\mathrm{P}(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que les événements A_p pour $p \in \mathcal{P}$ sont indépendant, avec $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
3. En déduire que :

$$\mathrm{P}(\{1\}) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \text{ et } \zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Exercices CCINP

Exercice 13 (CCINP 101).
Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice 14 (CCINP 107). On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.