Devoir Surveillé n°4 - corrigé

Exercice 1 :

Calculez les intégrales ou les primitives suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\ dx$
2. $\int_0^1 (2x+1)e^{2x}\ dx$
3. $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\ dx$

---

1. Pas de difficulté sur celle ci :
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\ dx = [\frac{1}{2}\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$
2. On procède par intégration par partie en posant $u(x) = 2x+1$ et $v'(x) = e^{2x}$. On a alors $u'(x) = 2$, $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x+1)e^{2x}\ dx &= [(2x+1)\frac{1}{2}e^{2x}]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx \\ &= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - [\frac{1}{2}e^{2x}]_0^1 \\ &= e^2\end{aligned}$$

3. x^2+3x+2 a pour racine -1 et -2, donc on cherche A et B tel que

$$\frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

On trouve $A = 1$ et $B = -1$, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\ dx &= \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx \\ &= [\ln(x+1)]_0^1 - [\ln(x+2)]_0^1 \\ &= \ln(2) - \ln(3) + \ln(2) \\ &= \ln(\frac{4}{3})\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2} dx$
2. En effectuant le changement de variable $x = \sin(\theta)$, calculez $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\theta)} d\theta$.

1. Comme $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, on va chercher $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

on trouve $A = \frac{1}{2}$ et $B = \frac{1}{2}$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x}dx \\ &= \frac{1}{2}[-\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}[\ln(1+x)]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(-\ln(\frac{1}{2})) + \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\ln(3)\end{aligned}$$

2. On suit l'indication proposée. En posant $x = \sin(\theta)$ il vient $dx = \cos(\theta)d\theta$. Les bornes deviennent alors 0 et $\frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(\theta)}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1-\sin^2(\theta)}\cos(\theta)d\theta \\ = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx \\ = \frac{1}{2}\ln(3)\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Soit l'équation

$$(E) : ty' - 2y = t^3$$

On se propose de chercher les solutions de (E), sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Il est demandé d'utiliser la méthode de variation de la constante pour déterminer une solution particulière.
   Les questions suivantes sont à faire seulement si il vous reste du temps, en dernier dans le DS
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$. On utilisera une autre lettre pour la constante obtenue sur cet intervalle.
3. Déterminer d'éventuelles conditions sur les constantes permettant d'obtenir des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ qui soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Même question pour des solutions de classe $\mathcal{C}^2$.
5. Montrez que pour cette équation, les problèmes de Cauchy n'ont pas forcément une unique solution. On donnera 3 situations différentes.

1. sur $\mathbb{R}_+^*$, $(E) \Leftrightarrow y - \frac{2}{t}y = t^2$

   Equation homogène : $E_0 : y - \frac{2}{t} = 0$
   En posant $a(t) = -\frac{2}{t}$, dont une primitive est $A : t \mapsto -2\ln(t)$, on déduit que

   $$E_0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y : t \mapsto \lambda e^{2\ln(t)} = \lambda t^2$$

   Solution particulière : on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)t^2$ où λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
   Alors $y_p'(t) = \lambda'(t)t^2 + 2t\lambda(t)$, et y_p est solution si

   $$\lambda'(t)t^2 = t^2 \Leftrightarrow \lambda'(t) = 1$$

   Ainsi, $\lambda(t) = t$ convient et $y_p : t \to t^3$ est une solution particulière.

   Conclusion :

   $$(E) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y : t \mapsto \lambda t^2 + t^3$$

2. On procède de la même façon sur $\mathbb{R}_-^*$, avec une valeur absolue dans $A(t)$, mais qui disparait grâce au carré.

   $$(E) \Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}, y : t \mapsto \mu t^2 + t^3$$

3. Remarquons déjà qu'en remplaçant t par 0 dans l'équation de départ, il vient $y(0) = 0$.
   Toutes nos solutions doivent donc vérifier $y(0) = 0$.
   Ainsi, pour le moment, nos solutions, si elles existent, sont de la forme

   $$y \mapsto \begin{cases} \lambda t^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ \mu t^2 + t^3 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

   Prenons un tel y. On remarque que $\lim\limits_{t\to 0^+} = \lim\limits_{t\to 0^+} \lambda t^2 + t^3 = 0 = y(0)$ et que $\lim\limits_{t\to 0^-} = \lim\limits_{t\to 0^-} \mu t^2 + t^3 = 0 = y(0)$ également. Donc y est continue en 0.
   De plus, y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} y'(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} 2\lambda t + 3t^2 = 0$, tout comme $\lim\limits_{t\to 0^-} y'(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} 2\mu t + 3t^2 = 0$.
   Ainsi, y est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, quels que soient λ et μ.
4. On trouve $\lim\limits_{t\to 0^+} y''(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} 2\lambda + 6t = 2\lambda$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} y''(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} 2\mu + 6t = 2\mu$ donc y est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si $\lambda = \mu$.
5. Voici 3 problème de Cauchy aux résultats totalement différents :

1er cas : On suppose (E) et $y(0) = 0$. Alors on a aucune info sur λ et μ (puisque toutes les solutions vérifient $y(0) = 0$. Il y a donc une infinité de solution à ce problème de Cauchy.

2e cas : On suppose (E) et $y(0) = 1$. Cette fois c'est impossible. Pas de solution à ce problème de Cauchy.

3e cas : On suppose (E), $y(1) = 0$ et $y(-1) = 0$: on a besoin de deux points pour fixés λ et μ. Dans cet exemple, on trouve $\lambda = -1$ et $\mu = 1$ et une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) - f(-x) = 1$.

1. Justifiez que f' est dérivable et montrez que $f''(x) = -f'(-x)$
2. En déduire que f est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + y = -1$$

3. Résoudre (E).
4. En déduire l'ensemble des fonctions f vérifiant $f'(x) - f(-x) = 1$

---

1. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que $f'(x) = 1 + f(-x)$. Comme f est dérivable, par composition de fonction dérivable, $\boxed{f' \text{ est dérivable et on a } f''(x) = -f'(-x)}$ (le "-" provient de la dérivée de $x \mapsto -x$)
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ également et on a $f'(x) = 1 + f(-x)$, donc $f'(-x) = 1 + f(x)$.
De plus, $f''(x) = -f'(-x)$, donc $f''(x) = -1 - f(x)$, et finalement

$$f''(x) + f(x) = -1$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est solution de l'équation } y'' + y = -1}$
3. On résout $E_0 : y'' + y = 0$, dont l'équation caractéristique est $x^2 + 1 = 0$. Les racines sont complexes, i et $-i$ et donc il existe A et B réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.
On cherche une solution constante : $y_p = -1$ convient et on en déduit l'ensemble des fonctions solutions de E :

$$\boxed{\exists A, B \in \mathbb{R}/y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) - 1}$$

4. On sait que f est solution de (E), donc $f(x)$ est de la forme $A\cos(x) + B\sin(x) - 1$ avec A et B réel. Reste à savoir si il y a des conditions sur A et B ! On a $f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$. Comme on veut $f(x) - f'(-x) = 1$, il faut $-A\sin(x) + B\cos(x) - (A\cos(-x) + B\sin(-x)) + 1 = 1$, d'où

$$-A\sin(x) + B\cos(x) - A\cos(x) + B\sin(x) = 0$$

ou encore

$$\cos(x)(B - A) + \sin(x)(B - A) = 0$$

Avec $x = 0$ on obtient $A = B$, et dès cet instant, on a bien $f(x) - f'(-x) = 1$.
Ainsi, les fonctions solutions sont celles de la forme $\boxed{y(x) = A(\cos(x) + \sin(x)) - 1 \text{ avec } A \in \mathbb{R}.}$

Exercice 5 :

Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.

1. 1ERE PARTIE : RACINES 7ÈME DE L'UNITÉ

On se propose de (re)résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

$$(E) \qquad z^7 = 1$$

On demande dans cette partie de remontrer la démarche de détermination des racines $n-$ième de l'unité.

(a) Justifiez qu'on peut chercher z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
(b) Déterminez les 7 solutions de (E) (en justifiant qu'il n'y en a que 7).
(c) Soit $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_6$ les solutions trouvées précédemment. Calculez $\prod_{k=0}^{6} \omega_k$.

2. 2e Partie : jeu avec une racine

Soit $u = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $a = u + u^2 + u^4$ et $b = u^3 + u^5 + u^6$.

(a) Justifiez que $u^7 = 1$ et écrire u^8, u^9 et u^{10} sous la forme u^k avec $0 \leq k \leq 6$ (chacun une valeur de k bien sûr).

(b) Calculer $s = a + b$.

(c) Calculer $p = ab$.

(d) Montrez que a et b sont les racines du polynôme $X^2 - sX + p$. En déduire que a et b appartiennent à l'ensemble $\left\{\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right\}$.

(e) On admet que $a = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $b = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.
Calculez $C = \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{8\pi}{7})$ et $S = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7})$.

1. 1ere Partie : racines 7ème de l'unité

(a) Comme $0^7 = 0 \neq 1$, 0 n'est pas solution de E. On résout donc l'équation sur $\mathbb{C}^*$ où tout complexe peut se représenter avec l'écriture exponentielle. On cherche donc z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) Par unicité de l'écriture exponentielle (à $2k\pi$ près pour les arguments), et en écrivant $1 = e^{i0}$, on a :

$$\left(\rho e^{i\theta}\right)^7 = e^{i0} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \rho^7 & = 1 \\ \exists k \in \mathbb{N}; 7\theta & = 2k\pi \end{array}\right.$$

On résout le système, et il vient $\rho = 1$ et $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{2k\pi}{7}$. L'ensemble des solutions est donc

$$S = \{e^{i\frac{2k\pi}{7}}, k \in \mathbb{Z}\}$$

On peut traiter maintenant le fait qu'il n'y a que 7 solutions de plusieurs façon.
Avec les polynômes, c'est le plus rapide : on cherche en fait les racines de $X^7 - 1$, qui est de degré 7, donc admet au plus 7 racines.
Comme pour $k \in [\![0, 6[\![$, $\frac{2k\pi}{7} \in [0, 2\pi[$, les nombres $e^{i\frac{2k\pi}{7}}$ sont tous distincts, et sont donc les 7 seules solutions de l'équation.

$$\boxed{S = \left\{z = e^{i\frac{2k\pi}{7}}, k \in [\![0; 6]\!]\right\}}$$

(c) Une première technique est d'écrire $P = \prod_{k=0}^{6} \omega_k = \prod_{k=0}^{6} e^{i\frac{2k\pi}{7}} = \exp(\sum_{k=0}^{6} \frac{ki2\pi}{7})$.
Or $\sum_{k=0}^{6} \frac{ki2\pi}{7} = i\frac{2\pi}{7} \sum_{k=0}^{6} k = i\frac{2\pi}{7} \times \frac{6 \times 7}{2} = 6i\pi$, donc $P = e^{i6\pi} = 1$ ainsi $\boxed{\prod_{k=0}^{6} \omega_k = 1}$
On peut aussi utiliser le lien entre les racines des polynômes et les coefficients d'un polynôme, qui donne directement que $\prod_{k=0}^{6} \omega_k = (-1)^7 \frac{-1}{1} = 1$.

2. 2e Partie : jeu avec une racine

(a) On a $u^7 = e^{i2\pi} = 1$. Comme $u^8 = u.u^7$, on obtient $\boxed{u^8 = u}$, et de même $\boxed{u^9 = u^2}$ et $\boxed{u^{10} = u^3}$.

(b) on a $s = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = \sum_{k=1}^{6} u^k = u\frac{1-u^6}{1-u} = \frac{u-u^7}{1-u} = \frac{u-1}{1-u} = -1$. $\boxed{s = -1}$
Alternativement, on peut aussi utiliser le lien entre les racines et les coefficients, puisque celui ci donne $\sum_{k=0}^{6} \omega_k = 0$. Comme $\omega_0 = 1$, on a donc $\sum_{k=1}^{6} u^k = -1$.

(c) $p = (u+u^2+u^4)(u^3+u^5+u^6) = u^4+u^6+u^7+u^5+u^7+u^8+u^7+u^9+u^{10}$. En réorganisant la somme et en utilisant le résultat obtenu en 1), on obtient $P = 3+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6 = 3+S = 2$. $\boxed{P = 2}$.

(d) Le polynôme $(X-a)(X-b)$ a pour racines a et b. En le développant, il vient $X^2-(a+b)X+ab = X^2 - sX + p$. Or, on vient de calculer $S = a+b$ et $P = ab$: a et b sont donc les solutions de l'équation complexe $z^2+z+2=0$, dont les racines sont $\boxed{\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}.}$

Remarque : L'énoncé donnait le résultat, mais on peut par exemple interpréter a et b sous la forme d'addition de vecteurs du plan, et on déduit alors que $\mathcal{I}m(a) > \mathcal{I}m(b)$ d'où $a = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $b = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

(e) Il suffit d'observer que $C + iS = a$. Il reste à utiliser l'unicité d'écriture de la forme algébrique pour déduire $\boxed{C = \dfrac{-1}{2} \text{ et } S = \dfrac{\sqrt{7}}{2}.}$

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt$.

1. (a) Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$. Justifiez que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire l'ensemble de définition de f.
2. Montrez que f est impaire (on pourra utiliser le changement de variable $u = -t$.)
3. On rappelle pour cette question le résultat suivant, appelé "propriété de croissance de l'intégrale" :

Soient a et b deux réels avec $a < b$, et soient u et v deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si pour tout $t \in [a,b]$, $u(t) \leq v(t)$, alors $\displaystyle\int_a^b u(t)dt \leq \int_a^b v(t)dt$.

   (a) Montrez que pour tout $t > 0$,
   $$\frac{1}{t+2} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} \leq \frac{1}{t}$$
   (b) En déduire que, pour tout $x > 0$,
   $$\ln\left(\frac{2x+2}{x+2}\right) \leq f(x) \leq \ln(2)$$
   (c) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$? et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$?
4. (a) Soit G une primitive de g. Exprimez f en fonction de G.
   (b) Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et montrez que
   $$f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{4+4t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+t^2}}$$
   (c) En déduire le tableau de variation de f, en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

---

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4 + x^2 > 0$, donc g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   Par composition et quotient de fonctions continues, elle est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, g est continue sur $[x, 2x]$ (si $x \geq 0$) ou $[2x, x]$ (si $x \leq 0$) et donc $\displaystyle\int_x^{2x} g(t)dt$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc $\boxed{\text{définie sur } \mathbb{R}.}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt.$
   On effectue le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ $u = -t$ (donc $du = -dt$) ce qui donne
   $$f(-x) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(-u)^2}} du = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+(u)^2}} du = -f(x)$$
   Ainsi, $\boxed{f \text{ est impaire.}}$
3. (a) pour tout $t > 0$, $2t > 0$, donc $4+t^2 < 4+2t+t^2 = (2+t)^2$ et $4+t^2 > t^2$. En prenant la racine dans ces inégalités (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante), on obtient
   $$|t| \leq \sqrt{4+t^2} \leq |t+2|$$
   Comme $t > 0$ et $t+2 > 0$, on peut enlever les valeurs absolues, et par passage à l'inverse, il vient :
   $$\boxed{\frac{1}{t+2} \leq \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} \leq \frac{1}{t}}$$

(b) Pour $x > 0$, $2x > x$ et par croissance de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+2} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

d'où

$$[\ln(t+2)]_x^{2x} \leq f(x) \leq [\ln(t)]_x^{2x}$$

c'est à dire

$$\boxed{\ln(\frac{2x+2}{x+2}) \leq f(x) \leq \ln(\frac{2x}{x}) = \ln(2)}$$

(c) comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+2}{x+2} = 2$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\frac{2x+2}{x+2}) = \ln(2)$ et par le théorème d'encadrement, on en déduit

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln(2)}$$

Par imparité (et surtout pas en réutilisant l'inégalité précédente, qui n'est valable que pour $x > 0$), on $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\ln(2)}$.

4. (a) Par définition de l'intégrale, on a $f(x) = [G(t)]_x^{2x}$, d'où $f(x) = G(2x) - G(x)$

(b) Comme G est une primitive, G est une fonction dérivable, à dérivée continue (puisque g l'est), donc G est de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $f(x) = G(2x) - G(x)$, alors par somme et composition de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$.
On a alors $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x)$

$$\boxed{f'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{4+4t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+t^2}}}$$

(c) Plusieurs façon de faire :

-En mettant au même dénominateur, on obtient $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{4+t^2} - \sqrt{4+4t^2}}{\sqrt{4+4t^2}\sqrt{4+t^2}}$

On résout maintenant $2\sqrt{4+t^2} - \sqrt{4+4t^2} \geq 0$:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{4+t^2} - \sqrt{4+4t^2} \geq 0 &\Leftrightarrow 2\sqrt{4+t^2} \geq \sqrt{4+4t^2} \\ &\underset{\text{les deux termes sont toujours positifs}}{\Leftrightarrow} 4(4+t^2) \geq 4+4t^2 \\ &\Leftrightarrow 16 \geq 4 \\ &\Leftrightarrow t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Finalement $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
f est donc croissante. (et même strictement)
Mais le plus rapide est d'écrire que

$$2\frac{1}{\sqrt{4+4t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} = 2\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{4+t^2}}$$

Et comme $\sqrt{1+t^2} \leq \sqrt{4+t^2}$, on a directement $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{4+t^2}} > 0$

On obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
f	$-\ln(2)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$