Analyse : Chapitre 6

Suites - généralités

I Rappels et compléments sur $\mathbb{R}$

1) Relation d'ordre et intervalle

a) Ordre et inégalité :

On admet que tout nombre réel peut être comparé au nombre 0 :

- Si x est plus grand que 0, alors on note $x \geq 0$ et on dit que x est **positif**. Si $x \neq 0$ et $x \geq 0$, on dit que x est **strictement positif** et on note $x > 0$.
- Si x est plus petit que 0, alors on note $x \leq 0$ et on dit que x est **negatif**. Si $x \neq 0$ et $x \leq 0$, on dit que x est **strictement negatif** et on note $x < 0$.

Propriété 1 :
L'ensemble des réels est totalement ordonné via la relation d'ordre $\leq$ définie, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ par :

$$x \leq y \Longleftrightarrow 0 \leq y - x$$

On définit de la même manière la relation $\geq$ par

$$x \geq y \Longleftrightarrow x - y \geq 0$$

Ces définitions permettent de montrer simplement les propriétés ci dessous

Propriété 2 :
Soient A et B deux réels et soit $C \in \mathbb{R}$.
Alors

$$A \leq B \Longleftrightarrow A + C \leq B + C$$

Si $C > 0$,

$$A \leq B \Longleftrightarrow AC \leq BC$$

Si $C < 0$,

$$A \leq B \Longleftrightarrow AC \geq BC$$

A retenir : l'addition ne pose aucun problème. En revanche multiplier (ou diviser) peut changer le signe de l'opérateur.

b) Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition :
Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$. On appelle intervalles de $\mathbb{R}$ les ensembles suivants :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$
$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$
$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$
$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

On admet la caractérisation suivante :

Proposition 1 :
Soit $I \subset \mathbb{R}$, alors I est un intervalle si et seulement si pour tout $a, b \in I$, $[a, b] \subset I$

2) Propriété de la borne supérieure

a) Notion de majorant et minorant

Définition :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble.

(i) On dit que A est **majoré** si et seulement si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq M$$

On dit alors que M est un **majorant**.

(ii) On dit que A est **minoré** si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, m \leq a$$

On dit alors que m est un **minorant**.

(iii) Dire que A est **borné** signifie que A est majoré **et** minoré.

Proposition 2 :

A est borné équivaut à $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, |a| \leq M$

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

Exemples :

- $A = \{1, 4, 3, 2\}$ est majoré par 4, mais aussi par 10, 23.... Il est minoré par 0, -10, etc. C'est un ensemble borné, dont deux bornes sont -1 et 10... mais elles ne sont pas "optimales"...
- $I =]-\infty, 3[$ est majoré (par 3 par exemple, mais aussi par 10 si on veut...), mais non minoré. Ce n'est pas un ensemble borné.

b) Maximum, minimum

Définition :

Soit A un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$.
On dit que A admet un **maximum** si et seulement si il existe un élément M *appartenant* à l'ensemble A tel que M est un majorant. On note alors $M = max(A)$.

De même, si A et minoré et qu'il existe $m \in A$ tel que m est un minorant, on dit que m est un **minimum** et on note $m = min(A)$.

Exemples

- Soit $A = \{1, 2, 4, 3\}$.

- Soit $I =]0; 1[$.

c) Borne supérieure et borne inférieure :

Theorème 1 : propriété de la borne supérieure et de la borne inférieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble **non vide.**

1. Si A est majoré, alors A admet un plus petit majorant, noté $\sup A$ et appelé **borne supérieure** de A.
2. Si A est minoré, alors A admet un plus grand minorant, noté $\inf A$ et appelé **borne inférieure de** A**.**

Définition :

Soit $A \subset \mathbb{R}$.
Si A est non majoré, on pose

$$\sup A = +\infty,$$

Si A est non minoré, on pose

$$\inf A = -\infty$$

Remarque :
la borne inférieure et la borne supérieure n'appartiennent pas forcément à l'ensemble. Si c'est le cas, c'est qu'on a affaire à un minimum ou un maximum.

Proposition 3 : Caractérisation de la borne supérieure

Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $A \neq \emptyset$ et A majoré. Soit $M \in \mathbb{R}$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < a \end{cases}$$

▷ *Preuve* :

◁

On montre de même la caractérisation de la borne inférieure :

Proposition 4 :

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ et A minoré, alors

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, m \leq a \\ \text{et} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } a < m + \varepsilon \end{cases}$$

Exemple :
Soit $A =]0;+\infty[$. Montrons que 0 est la borne inférieure de A.

II Suites numériques

1) Généralités

a) L'ensemble $E^{\mathbb{N}}$

Définition :

Soit E un ensemble.
On appelle **suite à valeurs dans** E toute application u de $\mathbb{N}$ dans E.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'image de n par u (au lieu de $u(n)$).

Pour parler de la suite, on pourra parler de la "suite u", ou plus fréquemment, de la "suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$" ou encore "la suite (u_n)".

L'ensemble des suites à valeurs dans E est noté $E^{\mathbb{N}}$.

Remarques :

- Dans ce chapitre, E sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On parle alors de **suites numeriques**.
  On peut tout à fait définir des suites de vecteurs, de matrices, de fonctions, de polynômes, etc....
- On peut avoir besoin de définir des suites non pas pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais à partir d'un certain rang p. On le note alors dans l'écriture de la suite. Par exemple :
  - La suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ est définie à partir du rang 1. On écrira donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
  - La suite définie par $u_n = \ln(n+\sqrt{5})$ est définie à partir de $n = 3$. On note alors $(u_n)_{n\geq 3}$.

A noter : A PARTIR D'UN CERTAIN RANG...

Assez fréquemment, on utilisera aussi cette expression "à partir d'un certain rang", abrégée "APCR" pour parler de propriété valable non pas depuis le début de la suite, mais éventuellement plus tard, sans que connaître la valeur de ce rang soit importante.

Par exemple, on peut dire que la suite $u_n = \ln(132) - n$ est négative à partir d'un certain rang.

VOCABULAIRE

Suite stationnaire :
Une suite est dite stationnaire si c'est une application constante :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = C$$

Suite périodique :
Une suite pour laquelle il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout n, $u_{n+p} = u_n$.

Exemples :
Les suites $u_n = (-1)^n$ et $v_n = e^{i\frac{2n\pi}{7}}$ sont périodiques avec pour périodes respectives

b) Différentes façons de définir les suites :

- **Définition explicite :** c'est la situation où l'on exprime les termes de la suite directement en fonction de n, sous la forme $u_n = f(n)$.
  Par exemple $u_n = (-1)^n$, $u_n = 2^n$, $u_n = \cos(n)$,...
  Une définition explicite permet de calculer n'importe quel terme immédiatement.
- **Définition par récurrence :** grace au principe de récurrence, on peut définir une suite de la façon suivante :
  $$\begin{cases} u_0 &= x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= f(u_n, n) \end{cases}$$
  où f est une application de $E \times \mathbb{N} \to E$ et $x \in E$.
  Par exemple, soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = n + u_n$.

  Ici, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est la fonction

  Pour avoir un terme, on a besoin de calculer tous les précédents.

  Ici : on a $u_1 =$ $u_2 =$ $u_3 =$

  Remarque :
  On peut définir de même une suite (u_n) en donnant u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n (on parle de suite récurrente d'ordre 2), ou u_{n+3} en fonction des trois précédents, etc., voire u_n en fonction de tous les termes d'avant !
- **Définition implicite :**
  On parle de suite définie de manière implicite quand une suite est définie comme solution d'une ou plusieurs équations.
  Par exemple : soit $f_n : x \mapsto e^{nx} - 2$. Comme f_n est continue, strictement croissante, que $f_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, il existe un unique réel qui annule f_n.
  On note u_n ce nombre (puisqu'il dépend de n), ce qui définit donc une suite.

Remarque :
Il n'est pas toujours possible d'exprimer une suite des trois façons à la fois ! (c'est même rare que ce soit possible...)

2) Suites réelles

a) Suites majorées, minorées

Définition :

On dit qu'une suite est **majorée** (respectivement **minorée**, resp. **bornée**) si et seulement si l'ensemble des valeurs prises par la suite est majoré (resp. minoré, resp. borné).

De même que pour les ensembles, on a la caractérisation via la valeur absolue

Propriété 3 :
La suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée.

Exemples :

- $u_n = 2^n$
- $u_n = \dfrac{1}{n}$
- $u_n = (-1)^n 2^n$

Remarque :
Lorsqu'il y a des majorants et ou des minorants, ceux-ci ne sont pas uniques. Par exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$ est majorée par

b) Borne supérieure et borne inférieure d'une suite :

Définition :

Si (u_n) est une suite, on note $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$ et $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$ (ou simplement $\sup(u_n)$ et $\inf(u_n)$) la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des valeurs prises par la suite.

Exemples :

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2$. Alors $\inf(u_n) =$ et $\sup(u_n) =$
- Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$. Alors

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*} u_n = \inf\left(\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \qquad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}^*} u_n =$$

c) Suites monotones

Définition :

Soit (u_n) une suite.

1. (u_n) est dite **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
2. (u_n) est dite **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

On dit que (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

On définit de la même façon la stricte croissance : (u_n) est **strictement croissante** signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.
Et on a de manière analogue la stricte décroissance et la stricte monotonie.

Danger ! **PIÈGES FRÉQUENTS :**

- Le contraire de "suite croissante" n'est pas "suite décroissante" : une suite peut être ni l'un, ni l'autre. Par exemple $u_n = n(-1)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante.
- La notion de "monotonie" sous entend que cela ne change jamais de "sens" : c'est soit croissant, soit décroissant.
  Contrairement aux fonctions, il n'y a pas pour les suites de notion de "croissante sur un intervalle I", "décroissante sur un intervalle J".
  On peut néanmoins parler de croissance ou décroissance "à partir d'un certain rang".

Remarques :

- Une suite stationnaire est une suite croissante : on a en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$, donc $u_{n+1} \geq u_n$. C'est bien une suite monotone.
  Et c'est également une suite décroissante...
  En fait, *les suites stationnaires sont les seules suites à la fois croissantes et décroissantes.*
- Par une récurrence immédiate,

$$(u_n) \text{ est croissante} \iff \forall n, p \in \mathbb{N}, \text{ si } n \leq p, \text{ alors } u_n \leq u_p$$

Méthode : **MONTRER QU'UNE SUITE EST CROISSANTE**

Pour montrer qu'une suite est croissante, on peut le faire de plusieurs façons. Les plus habituelles sont les suivantes :

- Calculer $u_{n+1} - u_n$ pour tout n et montrer que le signe est constant (indépendamment de n). Si c'est toujours positif, (u_n) est croissante, si c'est toujours négatif, (u_n) est décroissante.
- Si (u_n) est une suite *strictement positive*, calculer u_{n+1}/u_n. Si ce quotient est toujours plus grand que 1, (u_n) est croissante. Si il est toujours compris entre 0 et 1, (u_n) est décroissante.
- Si (u_n) est de la forme $u_n = f(n)$, avec f une fonction monotone, alors (u_n) est de même monotonie que f.

Exemple fondamental : suite $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$
Soit (u_n) une suite définie par $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$.

III Suites particulières

1) Suites usuelles :

Dans toute la section, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Suites arithmétiques

Définition :

Soit $r \in \mathbb{K}$. On dit que (u_n) est une suite **arithmétique** de raison r si on peut l'écrire sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rl} u_0 & \in \mathbb{K} \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} & = \end{array} \right. .$$

⚠ : le nombre r ne doit pas dépendre pas de n...

Proposition 5 :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n =$$

▷ *Preuve* : c'est une récurrence très simple... ◁

b) Suites géométriques

Définition :

Soit $q \in \mathbb{K}$. On dit que (u_n) est une suite **géométrique** de raison q si on peut l'écrire sous la forme

$$\begin{cases} u_0 & \in \mathbb{K} \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} & = \end{cases}$$

⚠ : le nombre q ne doit pas dépendre pas de n...

Proposition 6 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n =$$

▷ *Preuve* : par récurrence ◁

On rappelle le résultat suivant :

Proposition 7 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Soit k_0 et n deux entiers avec $k_0 \leq n$. Alors on a la formule suivante :

$$\sum_{k=k_0}^{n} u_k = u_{k_0} \times \frac{1 - q^{n-k_0+1}}{1-q}$$

En particulier,

$$\sum_{k=k_0}^{n} q^k = q^{k_0} \times \frac{1 - q^{n-k_0+1}}{1-q}$$

▷ *Preuve* : Soit par récurrence, soit comme fait en TD... ◁

On peut le retenir sur la forme $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{n} u_k = 1\text{er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1-q}$

c) Suites arithmético-géométriques

On combine les deux :

Définition :

On dit que (u_n) est une suite **arithmético-géométrique** si il existe $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ tel que

$$\begin{cases} u_0 & \in \mathbb{K} \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} & = au_n + b \end{cases}$$

Cas particuliers :

Si $a = 1$,

Si $b = 0$,

Si $a = 0$,

Plan d'étude si $a \notin \{0, 1\}$:

Méthode : **Etude d'une suite arithmético-géométrique**

Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence

$$(1) \qquad u_{n+1} = au_n + b$$

- 1ère étape : on cherche une constante c (ne dépendant pas de n donc) tel que

  $$(2) \qquad c = ac + b$$

  (autrement dit, on cherche une version "constante" de la suite).
- 2eme etape : on effectue l'opération $(1) - (2)$, ce qui donne :

  $$u_{n+1} - c = au_n + b - ac - b,$$

  $$\text{c'est à dire : } u_{n+1} - c = a(u_n - c)$$

  Ainsi, en posant $v_n = u_n - c$, la suite (v_n) est une suite géométrique.
- 3eme étape : on écrit la suite géométrique obtenue.
  (v_n) est géométrique de raison a, donc $v_n = v_0 a^n$.
- 4eme étape et conclusion : on se ramène à u_n
  Comme $v_n = u_n - c$, $u_n = v_n + c$ et on a

  $$u_n = v_0 a^n + c = (u_0 - c)a^n + c$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

2) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

a) Définition et polynôme caractéristique :

Définition :

On appelle **suite récurrente linéaires d'ordre 2** (en abrégé SRL2) toute suite (u_n) vérifiant une relation de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

où a et b sont des nombres réels ou complexes.

Propriété 4 :

Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ et $x, y \in \mathbb{C}$, il existe une unique suite (u_n) vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = x \text{ et } u_1 = y \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

▷ *Preuve* : C'est une conséquence du principe de récurrence double : une fois les deux premiers termes fixés, il n'y a qu'une seule façon "d'avancer" dans la construction. ◁

Exemple :
la suite de Fibonacci est une des plus célèbres SRL2. Elle est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

Le calcul d'un terme demande la connaissance des deux termes précédents....

Observation :
Soit (u_n) une suite vérifiant

$$(R) \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Définition :

Soit (u_n) une suite vérifiant une relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On appelle **equation caractéristique** de la suite l'équation

$$E_c : x^2 - ax - b = 0$$

Exemple : la suite de Fibonacci a pour equation caractéristique

b) Cas complexe :

Theorème 2 :
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, $b \neq 0$ et soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ et } u_0, u_1 \text{ complexes donnés}$$

Soit $E_c : x^2 - ax - b = 0$ l'équation caractéristique de la suite.
Deux cas se présentent :

- si E_c admet deux solutions (éventuellement complexes) distinctes λ et μ, alors il existe A et B complexes tel que $u_n = A\lambda^n + B\mu^n$.
- si E_c admet une racine double λ, alors $\exists (A,B) \in \mathbb{K}$ tel que $u_n = (A+Bn)\lambda^n$

Les nombres A et B se calculent à partir de u_0 et u_1.

▷ *Preuve* :

◁

Exemple :
Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+2} = (2+i)u_{n+1} - 2iu_n$$

c) Cas réel

Theorème 3 :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $b \neq 0$ et soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ et } u_0, u_1 \text{ réels donnés}$$

Soit $E_c : x^2 - ax - b = 0$ le polynôme caractéristique de la suite. Trois cas se présentent :

- si E_c admet deux solutions réelles distinctes λ et μ, alors il existe A et B réels tels que $u_n = A\lambda^n + B\mu^n$.
- si E_c admet une solution double λ, alors $\exists A, B \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = (A + Bn)\lambda^n$
- si E_c admet deux solutions complexes conjuguées λ et μ, en notant $\lambda = re^{i\theta}$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que
$$u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

Les nombres A et B se calculent à partir de u_0 et u_1.

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et vérifiant pour tout $n \geq 0$ que $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

- Reprenons la suite de Fibonacci :

3) Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Objectif et définitions

On s'intéresse aux suites à valeurs réelles vérifiant une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f \text{ est une fonction.}$$

Exemples :

- La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 1$. Ici, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec

$$f : x \mapsto$$

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$. Ici

$$f : x \mapsto$$

- Les suites arithmético-géométriques sont de ce type, avec $f : x \mapsto$.

Définition :

On dit qu'une suite est **bien définie** si tous les termes de la suite existent.

Ce problème se pose rapidement pour des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec un domaine de définition $D_f \neq \mathbb{R}$: il faut être sûr que $u_n \in D_f$ pour tout n, sinon la suite cesse d'être définie.

Exemples :

- (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 1$ n'a pas de problème de définition : la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$
- Pour (u_n) définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$, il peut y avoir un problème. En effet, la fonction $x \mapsto \sqrt{6 + x}$ n'est définie que sur $[-6, +\infty[$.
  Il faut donc s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -6$.
  Vérifions le par récurrence :

La clef de l'existence de u_n dans la preuve précédente est le fait que, pour tout $x \in [-6, +\infty[$, $f(x) \in [-6, +\infty[$ aussi, garantissant l'hérédité.

Définition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que I est **stable par f** si et seulement si $f(I) \subset I$

Exemple :

Pour $f :]-6, +\infty[\to \mathbb{R}$, on a bien $f(]-6, +\infty[) = [0, +\infty[\subset]-6, +infty[$: l'intervalle est bien un intervalle stable par f.
Il y en a d'autre ! Par exemple $f([-6, 3]) =$

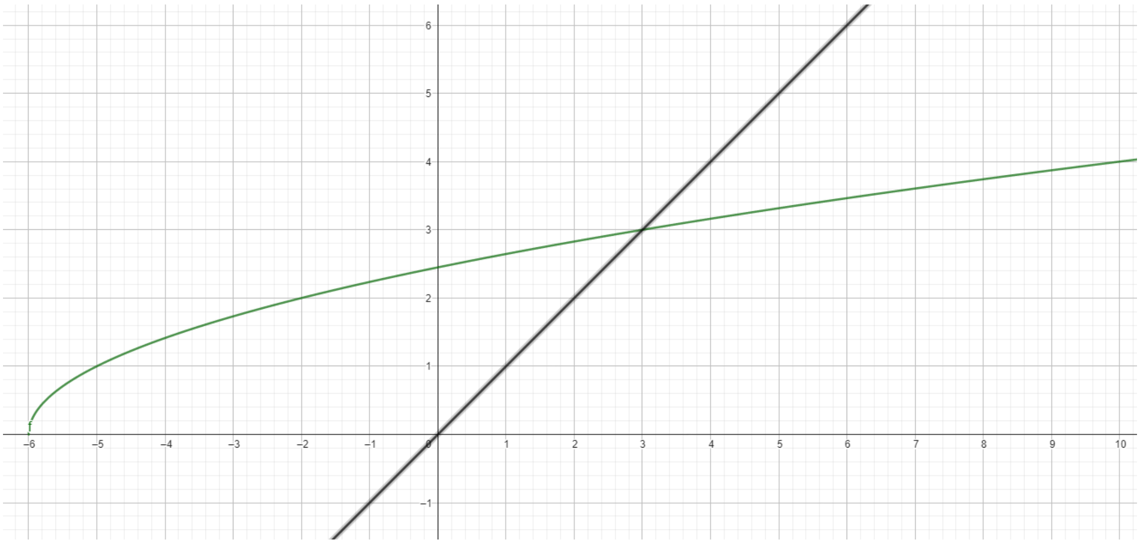
C'est bien un intervalle stable.
L'intervalle $[-6, 0]$ par contre n'est pas stable, puisque $f([-6, 0]) =$

b) Représentation graphique :

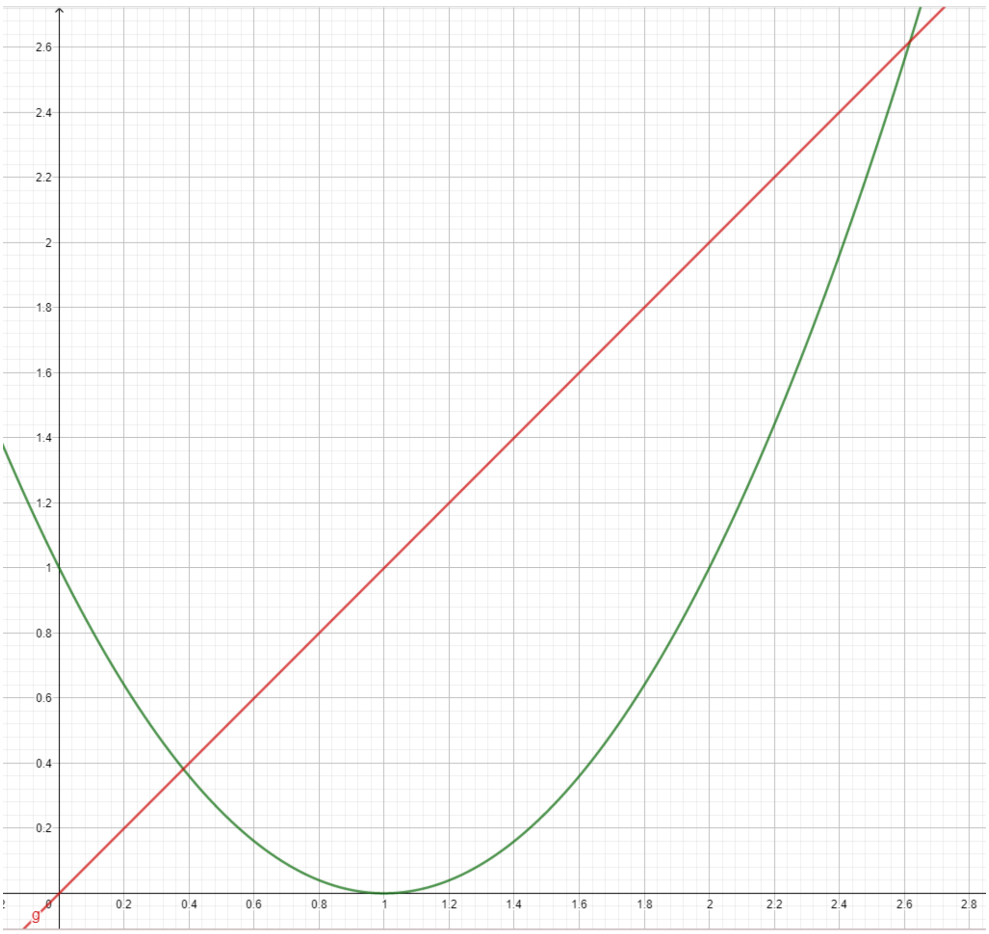
On peut représenter les termes successifs de la suite graphiquement, en traçant conjointement le graphe de f et la droite d'équation $y = x$.
Voici le principe :

1. On place u_0 sur l'axe des abscisses.
2. On calcule $u_1 = f(u_0)$ en allant verticalement vers la courbe $y = f(x)$.
3. On reporte l'image obtenue sur l'axe des abscisses en passant par la droite $y = x$.
4. On recommence pour $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite.

Voici pour notre suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$, et sur le même si $u_0 = 9$:



Maintenant avec la suite (u_n) définie par $u_0 = 1.5$ et $u_{n+1} = x^2 - 2x + 1$, puis la même avec $u_0 = 0.2$:



c) Pistes d'études

L'étude générale de suites de ce genre peut être compliquée, mais il y a des éléments importants permettant d'obtenir des informations sur le comportement de la suite :

- Les intervalles stables.
- La monotonie de la fonction.
- La position relative du graphe par rapport à la droite $y = x$.

Afin de repérer le plus possible ces points importants, on va donc étudier simultanément deux choses :

1. Les variations de f.
2. Le signe de $f(x) - x$.

Méthode : UTILISATION DU SIGNE DE $f(x) - x$

Soit f une fonction définie sur un ensemble I, stable par f.

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
On suppose que $f(x) - x$ est de signe constant sur I

1. Comme I est stable par f, on montre par récurrence que $u_n \in I$ pour tout n.
2. Comme $f(x) - x$ est de signe constant, pour tout $x \in I$, et que $u_n \in I$, alors $f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n$ est de signe constant : la suite est monotone.

Méthode : UTILISATION DE LA CROISSANCE DE f

Si f une fonction croissante sur un ensemble I stable.
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Alors la suite (u_n) est bien définie et est monotone :

1. Comme I est stable par f, on montre par récurrence que $u_n \in I$ pour tout n.
2. Comme f est croissante, on montre par récurrence que $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_1 - u_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Danger ! (u_n) MONOTONE MAIS PAS FORCÉMENT COMME f !

La propriété précédente permet de donner la monotonie de la suite, mais f croissante n'implique pas (u_n) croissante !
Sur la représentation graphique de la page précédente, on a vu que (u_n) pouvait aussi bien être croissante que décroissante, avec pourtant le même f de départ....

Exemple de $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$: