

I Limite d'une suite réelle.

1) Limite finie :

a) Définition

Idée intuitive : dire qu'une suite (u_n) admet une limite ℓ doit signifier qu'on se rapproche aussi près qu'on veut de ℓ lorsque n est grand.

Traduction mathématique : quel que soit l'intervalle ouvert autour de ℓ , il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle.

On utilise la définition avec quantificateur suivante :



Définition : suite convergente

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la suite (u_n) est **convergente** vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow{+\infty} \ell$.

b) Remarques

- Comme $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ équivaut à $-\varepsilon \leq u_n - \ell \leq \varepsilon$, ou encore à $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$, on peut donner une *seconde définition*, équivalente à la première :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ si et seulement si } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

- Comme $|u_n - \ell| = |u_n - \ell - 0|$, on a immédiatement que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0$$

- Contrairement à la limite de fonction (que l'on reverra plus tard), la limite d'une suite n'a de sens que quand $n \rightarrow +\infty$. On notera donc parfois $\lim u_n$ sans préciser " $n \rightarrow +\infty$ " car il n'y a pas d'ambiguïté possible.
- Une suite qui n'admet pas de limite finie est dite **divergente**.



A noter :

PRÉCISION SUR LE SIGNE

On dit que $\lim u_n = \ell^+$ si $\lim u_n = \ell$ et, à partir d'un certain rang, $u_n \geq \ell$.

De même, on dit que $\lim u_n = \ell^-$ si $\lim u_n = \ell$ et si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq \ell$.

On rencontre cela souvent pour des limites vers 0 (0^+ et 0^-). Par exemple $\lim \frac{1}{n} = 0^+$.

Attention, ℓ^+ et ℓ^- ne sont pas des nombres!!!! Ce sont des abréviations.

c) Théorème d'unicité :



Theorème 1 : unicité de la limite

Soient ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R}$.

Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ' , alors $\ell = \ell'$.

On dit que la limite d'une suite est "unique".

▷ *Preuve* :

◁

2) Limites infinies :



Définition : limite infinie

On dit qu'une suite (u_n) réelle a pour limite $+\infty$ si et seulement si pour tout $A \in \mathbb{R}$, u_n est supérieure à A à partir d'un certain rang, autrement dit

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

De même, on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si



À noter :

- ▶ Comme pour les limites finies, le théorème d'unicité est vérifié.
- ▶ Une suite qui "tend vers" $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas considérée comme convergente. On dit qu'elle "diverge" vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).

3) Suites extraites

a) Définition



Définition : suite extraite

Soit (u_n) une suite.

On appelle **suite extraite** de (u_n) toute suite de la forme

$(u_{\varphi(n)})$ avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Exemples :

b) Limite et suites extraites



Proposition 1 :

Si (u_n) admet une limite (finie ou infinie), alors toutes les suites extraites admettent la même limite.

▷ *Preuve* :

Exemple :

Ce résultat s'utilise fréquemment dans sa version contraposée : si des suites extraites admettent des limites différentes, ou si une suite extraite n'en admet pas, alors (u_n) n'a pas de limite. Soit par exemple $u_n = (-1)^n$.

c) Partitionnement pair/impair :**Theorème 2 :**

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \ell \\ \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \ell \end{cases}$$

▷ *Preuve* :

◁

Remarque :

Ce théorème reste valable avec des limites infinies, avec une preuve similaire.

4) Et si les suites sont à valeurs complexes ?

- La définition de la limite finie est inchangée, à ceci près que la valeur absolue est remplacée par le module :



Définition :

On dit que la suite (u_n) est **convergente** vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

De plus, on a le résultat suivant :



Propriété 1 :

Soit (u_n) une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$, alors

$$\lim u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim \operatorname{Re}(u_n) = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim \operatorname{Im}(u_n) = \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}$$

▷ *Preuve* :

◁

- La version avec encadrement de la suite n'est plus possible (pas d'ordre dans $\mathbb{C}$)
- La notion de limite infinie n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$ (toujours à cause de l'absence d'ordre)
- Toutes les autres propriétés restent valables (unicité, suite extraite, etc.)

II Théorèmes généraux

1) Opérations sur les limites et formes indéterminées :



NOTATION

Dans les tableaux ci dessous, on note **F.I.** les “formes indéterminées”.

Cela signifie qu'il n'y a pas de résultat vrai à chaque fois : tout peut se passer, de la limite finie à l'absence de limite.

Vous pourrez TOUJOURS déterminer ce qu'il se passe. Ainsi, "forme indéterminée" ne sera jamais une réponse à un calcul de limite....

Dans les tableaux qui suivent, (u_n) et (v_n) désignent des suites de nombres réels, ℓ et ℓ' sont des nombres réels.

Somme de limites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$					

Produit de limites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$								

Quotient de limites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell > 0$ ou $= +\infty$	$\ell > 0$ ou $= +\infty$	$\ell < 0$ ou $= -\infty$	$\ell < 0$ ou $= -\infty$	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	0	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$									

Exemples de preuve :

Toutes ces formules se démontrent plus ou moins de la même façon. Par exemple pour la somme :



Au secours !

Y'A TROP DE FORMULES !

~~~~~ Ces formules peuvent avant tout "se sentir", et n'ont pas forcément à être apprises par coeur.

~~~~~ Concentrez vous d'abord sur les formes indéterminées : savoir exactement les formes problématiques fait que vous pourrez "deviner" les autres intuitivement.

2) Limites et inégalités

a) Signe de la suite et signe de la limite



Theorème 3 : signe de la limite

| Soit (u_n) une suite réelle convergente vers une limite $\ell \neq 0$, alors u_n est du signe de ℓ à partir d'un certain rang.

▷ Preuve :

◁

b) Passage à la limite dans une inégalité :



Corolaire 1 : inégalité et limite

| Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers ℓ et ℓ' .
 | Si à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\ell \leq \ell'$.

▷ Preuve :

◁

Cas particulier d'application : suite majorée

Si on sait qu'une suite u_n converge et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq M,$$

alors on peut affirmer que

$$\lim u_n \leq M.$$

On dit qu'on "passe à la limite" dans l'inégalité.

**Danger !****INÉGALITÉS LARGES SEULEMENT !**

On ne travaille qu'avec des inégalités LARGES (c'est à dire $\leq$ ou $\geq$). Le théorème est faux avec des inégalités strictes (c'est à dire $<$ ou $>$).

Ainsi, si $u_n > M$ pour tout n , on n'a pas forcément $\lim u_n > M$.

Par exemple avec $u_n = \frac{1}{n}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, mais on n'a pas $\lim u_n > 0$.

A retenir : Lorsque l'on passe à la limite, les $<$ deviennent $\leq$ et les $>$ deviennent $\geq$.

c) Théorèmes d'encadrements (ou des gendarmes)**Théorème 4 : Théorème des gendarmes**

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles. On suppose que à partir d'un certain rang,

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si $\lim u_n = \lim w_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) est convergente et $\lim v_n = \ell$.

▷ *Preuve* :

Pour les limites infinies, un encadrement n'est pas nécessaire :



Theorème 5 : Divergence par majoration ou minoration

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que APCR, $u_n \leq v_n$.

Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.

Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$

▷ *Preuve* : Même genre de preuve.

◁



Méthode :

PRODUIT PAR UNE SUITE BORNÉE ET UTILISATION DU THÉORÈME DES GENDARMES

Le théorème d'encadrement permet de traiter rapidement certains cas avec un produit par une suite bornée :

Soit (u_n) une suite de la forme $u_n = a_n b_n$ avec (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_n \rightarrow 0$ et b_n bornée.

► On écrit que $|u_n| = |a_n||b_n|$,

► Comme (b_n) est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq M$. On obtient alors l'encadrement :

$$0 \leq |u_n| \leq M|a_n|$$

► Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} M|a_n| \rightarrow 0$ aussi et le théorème d'encadrement permet de conclure que $|u_n| \rightarrow 0$, donc $u_n \rightarrow 0$.

Exemple :

Soit $u_n = \frac{\sin n}{n}$.

d) Approximation par des nombres décimaux

Observation :

soit $x \in \mathbb{R}$.

On a déjà défini $[x]$ comme étant la partie entière de x , c'est à dire l'entier immédiatement précédent x .

Par exemple $[\pi] = 3$.

Mais par quelle formule peut-on obtenir le fameux $\pi \simeq 3,14$?

On peut prendre

De manière générale, si on veut n décimales, on va donc calculer

**Proposition 2 :**

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soit $r_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $s_n = r_n + \frac{1}{10^n}$

Alors les suites (r_n) et (s_n) convergent vers x .

▷ *Preuve* :

◁

**Définition :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre r_n est appelé **approximation décimale par défaut** de x à la précision 10^{-n} , et s_n est appelé **approximation décimale par excès** de x à la précision 10^{-n} .

3) Suites bornées

a) Convergence et suites bornées

**Theorème 6 :**

Toute suite convergente est bornée.

▷ *Preuve* :

◁

b) Théorème de la limite monotone



Théorème 7 : Théorème de la limite monotone

1. Toute suite réelle croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.
2. Toute suite croissante non majorée diverge et a pour limite $+\infty$.

▷ *Preuve* :

◁



Corolaire 2 :

1. Toute suite réelle décroissante et minorée converge vers sa borne inférieure.
2. Toute suite décroissante non minorée diverge et a pour limite $+\infty$.

▷ *Preuve* : si (u_n) décroissante, alors $(-u_n)$ est croissante. On applique le théorème précédent à $(-u_n)$ et on montre donc sa convergence. ◁

Remarque

En résumé : une suite monotone admet toujours une limite.

Si elle est croissante, cette limite est sa borne supérieure, éventuellement $+\infty$, si elle est décroissante, cette limite est la borne inférieure, éventuellement $-\infty$.

4) Méthode élémentaire de calcul de limite

a) Factorisation par le terme “le plus fort”

Pour des limites de suite du type $\frac{A_n}{B_n}$ où A_n et B_n sont des sommes de suites, une technique souvent efficace est de factoriser A_n et B_n par leurs termes “les plus forts” et d’appliquer les propriétés d’opérations sur les limites.

Exemple :

$$\blacktriangleright u_n = \frac{n^3 - n + 2}{5n^3 + n^2 - n - 1}$$

$$\blacktriangleright u_n = \frac{3n^2 - n + 1}{\sin n + 4 - n^3}.$$

b) Croissances comparées

Pour appliquer la technique de factorisation par le terme le plus fort, on peut utiliser les “croissances comparées”. On les a déjà montré, mais on peut les rappeler ici :

 **Proposition 3 : Croissance comparées : version suites**

- (i) puissances contre logarithme : $\forall \alpha > 0, \beta > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$
- (ii) puissances contre géométrique : $\forall \alpha > 0, q > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$
- (iii) Puissances contre factorielle : $\forall q > 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!}$

Exemple :

$$\blacktriangleright u_n = \frac{\sqrt{n} - (\ln n)^2}{\sqrt{n}}.$$

III Etudes de convergence de suite

1) Convergence des suites usuelles



Proposition 4 :

1. Soit (u_n) une suite réelle arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}^*$. Alors $\lim u_n = +\infty$ si $r > 0$ et $\lim u_n = -\infty$ si $r < 0$.
2. Soit (u_n) est une suite géométrique réelle de raison $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors :
 - si $|q| < 1$, (u_n) converge et $\lim u_n = 0$.
 - si $q = 1$, (u_n) converge vers 1.
 - si $q > 1$, (u_n) diverge et $\lim u_n = +\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de u_0 .
 - si $q \leq -1$, (u_n) diverge sans limite.

▷ *Preuve* :

1. $u_n = u_0 + nr$, d'où l'affirmation.
2. On a $u_n = u_0 q^n$.
Considérons la suite $v_n = q^n$ et posons $w_n = |v_n|$. On a $w_n = |q|^n$.
Traisons tous les cas possibles sur q :

◁

Remarques :

Dans le cas suite complexe :

- Une suite arithmétique de raison non nulle, complexe non réelle diverge toujours, sans limite.
- Une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$ et diverge dans tous les autres cas, sans limite.

2) Suites adjacentes

a) Définition :



Définition : suites adjacentes

Deux suites (a_n) et (b_n) réelles sont dites adjacentes si et seulement si l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim(b_n - a_n) = 0$



Theorème 8 :

Si deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, alors elles convergent et ont même limite.

▷ Preuve :

◁

b) Exemple : La somme exponentielle

Soit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $T_n = S_n + \frac{1}{n}$. Montrons que (S_n) et (T_n) sont adjacentes.

3) Retour sur les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle I fermé, éventuellement infini, tel que $f(I) \subset I$ (on dit que I est stable par f).

Soit (u_n) une suite définie par
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On sait déjà (cf chapitre précédent) que la suite est bien définie : en effet, si $u_n \in I$, alors $f(u_n) \in f(I) \subset I$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ et la suite sera toujours définie.

a) Points fixes



Proposition 5 :

Si f est continue en un point a (c'est à dire $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$), alors pour toute suite tel que $\lim u_n = a$, $\lim f(u_n) = f(a)$

▷ *Preuve* : cf chapitre sur la continuité, à venir...

◁

Reprenons notre suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue.



Proposition 6 :

Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ , alors ℓ est un **point fixe** de f , c'est à dire que $f(\ell) = \ell$.

▷ *Preuve* :

◁

b) Exemple d'étude

Grandes lignes de la méthode (reprise et suite de la fin du chapitre 6)

Etape 1 : on étudie la fonction f en cherchant les points suivants :

1. Tableau de variation
2. Intervalles stables par f . (ie vérifiant $f(I) \subset I$)
3. Point fixe de f en étudiant le signe et les zeros de g définie par $v_n = f(x) - x$.

Etape 2 : discuter en fonction de u_0 le comportement de la suite, en cherchant les points suivants :

1. Est-elle bornée ?
2. Est-elle monotone ?

Etape 3 : conclure avec les théorèmes de croissance monotone et en reliant aux points fixes.

Exemples :

(u_n) définie par $u_0 > -6$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$