Devoir Maison n° 13.
Pour le 6 janvier 2025.

Exercice 1

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. **a)** La fonction S est-elle continue sur D ?

b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0,1]$.

Exercice 2

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.

3. **a)** Déterminer $S(x)$.

b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \ .$$

Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leqslant 1$.

2. On considère la série entière $\sum a_n x^n$, montrer que son rayon de convergence est supérieur à 1.
On note f la somme de cette série entière sur $]-1\,;1[$.

3. **a)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n+2}$.

b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

c) On note $\sum w_n x^n$ le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n+2}$.
Montrer que le rayon de convergence de $\sum w_n x^n$ est supérieur à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) En déduire que : $\forall x \in]-1\,;1[, f'(x) = f(x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4. Montrer que : $\forall x \in [0\,;1[, \ln(f(x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5. En déduire, pour tout $x \in [0\,;1[$ une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

6. Justifier que la série $\sum \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.