Corrigé du DM 12 : nombres de Catalan

1. *Cette question permet de comprendre l'énoncé pour de petites valeurs de n. Un mot de Dyck commence par une parenthèse ouvrante qui est associé à une parenthèse fermante. Pour énumérer tous les mots demandés, on peut lister toutes les positions possibles de cette parenthèse fermante.*

- Le seul mot de Dyck de longueur 2 est « () » donc $C_1 = 1$.
- Les mots de Dyck de longueur 4 sont « ()() » et « (()) » donc $C_2 = 2$.
- Les mots de Dyck de longueur 6 sont « ((())) », « (()()) », « ()(()) », « (())() », « ()()() » donc $C_3 = 5$.

2. L'ensemble des mots de Dyck de longueur $2n$ est inclus dans l'ensemble des mots de longueur $2n$ de l'ensemble {« (»,«) »}, c'est à dire l'ensemble des $2n$-listes d'éléments d'un ensemble de cardinal 2. Comme l'ensemble de toutes ces $2n$-listes est de cardinal 2^{2n}, on conclut que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, C_n \leqslant 2^{2n}.}$$

Puis, le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^{2n} x^n$ vaut $\frac{1}{4}$ d'après la règle de d'Alembert, donc

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de } \sum C_n x^n \text{ est supérieur ou égal à } \tfrac{1}{4}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour un mot de Dyck donné de longueur $2n$, on note k le plus petit entier naturel tel que les $2(k+1)$ premiers caractères du mot forment un mot de Dyck, il est bien défini comme minimum d'une partie de $\mathbb{N}$ non vide (si l'on prend les $2n$ premiers caractères on obtient bien un mot de Dyck).

Ainsi tout mot de Dyck s'écrit de manière unique sous la forme « $(m)\widetilde{m}$ » où m et $\widetilde{m}$ sont des mots de Dyck de longueur respectives $2k$ et $2n-2k-2$ pour k prenant des valeurs entières entre 0 et $n-1$.

Pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ fixé il y a C_k mots de Dyck de longueur $2k$ et C_{n-k-1} mots de Dyck de longueur $2n-2k-2$, donc $C_k C_{n-k-1}$ mots de la forme « $(m)\widetilde{m}$ » avec m de longueur $2k$; d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.}$$

4. On sait que la série entière $\sum C_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur à $\frac{1}{4}$, donc par produit de Cauchy, $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$.

$$\begin{aligned}
xS(x)^2 &= x \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n\right)\\
&= x \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right) x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} x^{n+1}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} C_n x^n\\
&= S(x) - C_0\\
&= S(x) - 1.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \left]-\tfrac{1}{4}\,;\tfrac{1}{4}\right[, xS(x)^2 - S(x) + 1 = 0.}$$

5. Pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}$, $S(x)$ est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 1 - 4x > 0$, donc les solutions sont :

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad \text{et} \quad \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}$:

$$S(x) = \frac{1+\epsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x},$$

avec $\epsilon(x) \in \{-1, 1\}$, d'où $\epsilon(x) = \frac{2xS(x)-1}{\sqrt{1-4x}}$. On introduit alors la fonction ϵ sous cette forme pour pouvoir ainsi la définir également en 0.

Soit la fonction ϵ définie sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ par :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \quad \epsilon(x) = \frac{2xS(x)-1}{\sqrt{1-4x}},$$

Donc ϵ est une fonction continue sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. De plus $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}, \varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$ et $\varepsilon(0) = -1$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ et $x_1 \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ tels que $\epsilon(x_0) = -1$ et $\epsilon(x_1) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x compris entre x_0 et x_1 tel que $\epsilon(x) = 0$, or $\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \epsilon(x) \in \{-1, 1\}$, d'où la contradiction. Ainsi, ϵ est constante sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Or $\epsilon(0) = -1$, donc ϵ vaut -1 sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, S(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.}$$

6. D'après les développements limités usuels :

$$\forall t \in \left]-1\,;1\right[, (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}-1) \times \cdots \times (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} t^n$$

Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$. Donc $|4x| < 1$ et :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}-1) \times \cdots \times (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-4x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times (-1) \times \cdots \times (-2n+3)}{2^n n!} (-4x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{n!} (-2x)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)}{(2n-1)(2 \times 4 \times \cdots \times (2n))n!} (x)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)(2^n n!)n!} (2x)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1}.
\end{aligned}$$

Donc, pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{1}{2x}\left(1 - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n-1}}{2(2n-1)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} \frac{x^n}{2(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de S, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \frac{1}{2(2n+1)} \binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Remarque 0.1 : On remarque que l'égalité est encore vraie pour $x = 0$, mais on n'en a pas besoin pour appliquer le théorème d'unicité du développement en série entière.