CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON 7

Exercice 1 : *Extrait E3A PC 2020*

1. Montrons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.
Initialisation : On a $a_0 = 1 \in]0,1]$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $0 < a_k \leqslant 1$.
Montrons que $0 < a_{n+1} \leqslant 1$.
On a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k > 0$ et $n-k \geqslant 0$ donc $\dfrac{1}{n-k+2} > 0$ donc par produit, $\dfrac{a_k}{n-k+2} > 0$ puis par somme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} > 0$ et comme $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on en déduit que $a_{n+1} > 0$.
On a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k \leqslant 1$ et $n-k+2 \geqslant 2 > 0$ donc $\dfrac{1}{n-k+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc par produit d'inégalités à termes tous positifs, on obtient $\dfrac{a_k}{n-k+2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ puis par somme, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2} \leqslant \frac{n+1}{2}$ et comme $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on en déduit que $a_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \leqslant 1$.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n \leqslant 1.}$

2. Notons R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
La suite $(a_n 1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée d'après la question précédente.
On en déduit qu'on a $1 \leqslant R_1$ puisque $R_1 = \mathrm{Sup}\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum a_n x^n \text{ est supérieur ou égal à 1.}}$$

3.(a) Notons R_2 le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$.
On a $\dfrac{1}{n+2} \sim \dfrac{1}{n}$ donc les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+2} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} x^n$ ont même rayon de convergence.
De plus, on sait que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} x^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n \times \frac{1}{n} x^n = \sum_{n\geqslant 1} x^n$.
Or, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est la série géométrique qui a pour rayon de convergence 1 puisque $\mathrm{Sup}\{r \in \mathbb{R}_+,\ \sum r^n \text{ converge}\} = \mathrm{Sup}[0,1[= 1$.
On en déduit que $R_2 = 1$.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum \frac{x^n}{n+2} \text{ est égal à 1.}}$$

3.(b) Comme $R_2 = 1$, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$ converge et pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$, la série $\sum \dfrac{x^n}{n+2}$ diverge.
De plus, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1^n}{n+2} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique) et la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+2}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées car la suite $\left(\dfrac{1}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble de définition de la fonction } x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \text{ est } [-1, 1[.}$$

3.(c) Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} w_n x^n$.

D'après le cours, on a $R \geqslant \min(R_1, R_2)$. Comme $R_1 \geqslant 1$ et $R_2 = 1$, on a $\min(R_1, R_2) = 1$ d'où $\boxed{R \geqslant 1}$.

On a de plus par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \times \frac{1}{n-k+2}$ d'où :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ w_n = (n+1)a_{n+1}.}$$

3.(d) Par produit de Cauchy, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \min(R_1, R_2)$ c'est-à-dire pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Or, en tant que somme d'une série entière, f est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence et on peut la dériver terme à terme donc :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1, 1[,\ f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}.}$$

4. Soit φ et ψ les fonctions définies par :

$$\varphi(x) = \ln\big(f(x)\big) \text{ et } \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.$$

Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \geqslant 1$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n x^n \geqslant 0$.

Comme f est définie et dérivable sur $[0, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, par composition avec la fonction ln définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction φ est définie et dérivable sur $[0, 1[$ et on a pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

d'après la question précédente.

Par ailleurs, par dérivation terme à terme, la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$ qui a pour rayon de convergence $R_2 = 1$ et on a pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\psi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} = \varphi'(x).$$

On en déduit qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [0, 1[$, $\varphi(x) = \psi(x) + K$.

Or, $\varphi(0) = \ln\big(f(0)\big) = \ln(a_0) = \ln(1) = 0$ et $\psi(0) = 0$ d'où $K = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0, 1[,\ \ln\big(f(x)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.}$$

5. On a $\ln\big(f(0)\big) = 0$ donc $f(0) = e^0 = 1$ et pour tout $x \in]0,1[$:

$$\ln\big(f(x)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+2} \quad \text{(ces deux séries convergent)}$$

donc :

$$\ln\big(f(x)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} - x\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Or, on sait que pour tout $t \in]-1,1[$, $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}t^n$ donc pour tout $x \in]0,1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$ d'où $\ln\big(f(x)\big) = 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln(1-x)$ et donc $f(x) = \exp\left(1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ln(1-x)\right) = e(1-x)^{\frac{1}{x}-1}$.

$$\boxed{\text{On a } f(0) = 1 \text{ et pour tout } x \in]0,1[,\ f(x) = e(1-x)^{\frac{1}{x}-1}.}$$

6. On a $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc d'après ce qui précède, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n = f\left(\frac{1}{2}\right) = e\left(\frac{1}{2}\right)^1$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{2^n} \text{ converge et a pour somme } \frac{e}{2}.}$$

CENTRALE Maths 1 PC 2024

Eléments de correction

Q 1. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geqslant \alpha+1$, $a_n = 0$ et donc la suite $(a_n x^n)_n$ est nulle à partir d'un certain rang, donc bornée pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc le rayon de convergence $R = \sup\{x \geqslant 0\ ,\ (a_n x^n)_n \text{ bornée }\} = +\infty$.

Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{|\alpha - n|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

Donc d'après la règle de D'Alembert, appliquée à une série entière de la forme $\sum a_n x^n$, $R = 1$.

question de cours ; attention à ne pas appliquer d'Alembert dans le cas $\alpha \in \mathbb{N}$ car $a_n = 0$ à partir d'un rang

Q 2. D'après le cours,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

question de cours

Q 3. On applique la question précédente avec $\alpha = \frac{1}{2}$. On a dans ce cas :

calcul classique d'un produit de nombres impairs

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1-2k}{2}\right) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k-1) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!2^n}\frac{(2n)!}{(2n-1)\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!2^n}\frac{(2n)!}{(2n-1)2^n(n!)} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2} = (-1)^{n+1} b_n \end{aligned}$$

Dans le cas $\alpha = \frac{1}{2}$, le rayon de convergence $R = 1$ d'après Q1, et d'après Q2 :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n$$

Q 4. On utilise la formule de Stirling :

Stirling puis produit d'équivalents

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{et} \quad (2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$$

Donc

$$b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}(2n)2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

On a donc $b_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente donc la série $\sum b_n$ est absolument convergente donc la série $\sum (-1)^{n+1} b_n$ est absolument convergente donc convergente.

Q 5. Notons pour tout $x \in [-1, 1]$, $f_n(x) = (-1)^{n+1} b_n x^n$, $|f_n(x)| \leqslant |b_n| = b_n$ donc $\|f_n\|_{\infty,[-1,1]} \leqslant b_n$ et la série $\sum b_n$ est convergente d'après la question précédente donc la série $\sum \|f_n\|_{\infty,[-1,1]}$ est convergente donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-1, 1]$.

point important : justifier $\lim\limits_{x\to1^-} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ par continuité de S en 1 ou par le théorème de la double limite

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue donc par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n$ est continue sur $[-1, 1]$, en particulier, elle est continue en 1^- :

$$\lim_{x\to1^-} S(x) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

Or pour tout $x \in]-1, 1[$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n = \sqrt{1+x}$, par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n = \lim_{x\to1^-} S(x) = \lim_{x\to1^-} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$$

Q 6. La suite $(b_n)_{n\geqslant1}$ est décroissante car $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-\frac{1}{2}}{n+1} < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$ (cf l'équivalent trouvé en Q4) donc la série $\sum\limits_{n\geqslant1} (-1)^{n+1} b_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, et donc par la majoration des restes :

il fallait penser au CSSA

$$\left|\sqrt{2}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}b_kx^k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k+1}b_kx^k\right|\leqslant|b_{n+1}|=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\quad\text{par Q4}$$

Q 7. *Initialisation* : $c_0(a)>0$.

récurrence élémentaire

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $c_n(a)$ bien défini et $c_n(a)>0$ alors comme $a\geqslant 0$,

$$c_n(a)+\frac{a}{c_n(a)}\geqslant c_n(a)>0$$

Par conséquent, $c_{n+1}(a)$ bien défini et $c_{n+1}(a)>0$.

Q 8. Soit $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}c_{n+1}(a)^2-a=\frac{1}{4c_n(a)^2}\left(c_n(a)^4+2ac_n(a)^2+a^2\right)-a&=\frac{1}{4c_n(a)^2}\left(c_n(a)^4-2ac_n(a)^2+a^2\right)\\&=\frac{1}{4c_n(a)^2}\left(c_n(a)^2-a\right)^2\end{aligned}$$

donc $c_{n+1}(a)^2\geqslant a$ et $c_{n+1}(a)>0$ d'où $c_{n+1}(a)\geqslant\sqrt{a}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et par conséquent,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad c_n(a)\geqslant\sqrt{a}$$

Q 9. On déduit de la question précédente que $(c_n(a))_{n\geqslant 1}$ est décroissante car

$$c_{n+1}(a)-c_n(a)=\frac{1}{2}\left(-c_n(a)+\frac{a}{c_n(a)}\right)=\frac{1}{2c_n(a)}\left(-c_n(a)^2+a\right)\leqslant 0\text{ pour }n\geqslant 1$$

argument classique d'une suite est décroissante (à partir du rang 1) et minorée ; puis passage à la limite dans la relation de récurrence pour trouver la limite

La suite $(c_n(a))$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, elle est donc convergente. Notons $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n(a)$.

Par passage à la limite dans l'égalité $c_{n+1}(a)=\dfrac{1}{2}\left(c_n(a)+\dfrac{a}{c_n(a)}\right)$,

$$\ell=\frac{1}{2}\left(\ell+\frac{a}{\ell}\right)\quad\text{donc}\quad\ell^2-a=0\quad\text{d'où }\ell\in\{-\sqrt{a},\sqrt{a}\}$$

Or $\ell\geqslant\sqrt{a}$ car $c_n(a)\geqslant\sqrt{a}$ d'où $\ell=\sqrt{a}$.

Q 10. On a $c_1(2)=\dfrac{1}{2}\left(c_0(2)+\dfrac{2}{c_0(a)}\right)=\dfrac{3}{2}$ donc $c_1(2)^2-2=\frac{1}{4}=8\left(\frac{1}{32}\right)^1$.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $c_n(2)^2-2\leqslant 8\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$. On a alors :

$$c_{n+1}(2)^2-2=\frac{1}{4c_n(2)^2}\left(c_n(2)^2-2\right)^2\leqslant\frac{1}{4c_n(2)^2}\left[8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right]^2\leqslant 8\left(\frac{1}{32}\right)^{2^n}$$

en utilisant $c_n(2)^2\geqslant 2$ (Q8).

On en déduit par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $c_n(2)^2-2\leqslant 8\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$ et

$c_n(2)+\sqrt{2}\geqslant 2\sqrt{2}$ par Q8

$$\left|\sqrt{2}-c_n(2)\right|=\frac{c_n(2)^2-2}{c_n(2)+\sqrt{2}}\leqslant\frac{8}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\underset{n\to+\infty}{=}\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\right)$$

Q 11. Par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{3/2}\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}=0$ donc $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha q^n=0$ si $|q|<1$

La suite $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{2^{n-1}}$ converge plus vite que $\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Q 12. M est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral,

question ultra-classique d'application du théorème spectral

il existe $P\in O(q)$ et $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_q)$ tel que $M=PDP^{-1}=PDP^T$.

On pose $B=P\Delta P^T$ avec $\Delta=\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_q})$ (possible car les valeurs propres de M sont positives : $\lambda_i\geqslant 0$).

On a alors $B^2 = P\Delta^2 P^T = PDP^T = M$.

Et la matrice B est symétrique ($B^T = B$) positive car ses valeurs propres ($\sqrt{\lambda_i}$) sont positives.

Q 13 (rédaction 1). Soit C une matrice symétrique positive vérifiant $B^2 = C^2 = M$. Montrons que $B = C$. Pour cela, on va montrer que les applications linéaires $f : x \mapsto Bx$ et $g : x \mapsto Cx$ sont égales sur chacun des sous-espaces espaces propres de M, $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_q)$.

l'unicité est plus délicate que l'existence. Rédaction 1 : on considère l'endomorphisme induit par B sur chacun des sous-espaces propres de M

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Notons $E_\lambda = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_q)$.

On a $BM = B^3 = MB$ donc E_λ est stable par f (on pourrait dire par B).

L'endomorphisme induit par f sur E_λ, noté f_λ, est diagonalisable car f est diagonalisable.

On cherche le spectre de f_λ.

Soit $\mu \in \mathrm{Sp}(f_\lambda)$. Alors il existe $x \in E_\lambda$, non nul, tel que $f_\lambda(x) = \mu x$, c'est-à-dire $Bx = \mu x$. On a $\mu \geqslant 0$ car B est symétrique positive et

$$\lambda x = Mx = B^2 x = \mu^2 x \quad \text{d'où} \quad \lambda = \mu^2 \quad \text{donc} \quad \mu = \sqrt{\lambda}$$

Par conséquent, $\mathrm{Sp}(f_\lambda) = \{\sqrt{\lambda}\}$ et f_λ étant diagonalisable, on en déduit que $f_\lambda = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_{E_\lambda}$.

On montre de même que l'endomorphisme induit par $g : x \mapsto Cx$ sur E_λ est $g_\lambda = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_{E_\lambda} = f_\lambda$.

Donc pour tout $x \in E_\lambda$, $f_\lambda(x) = g_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}\,x$, soit $Bx = Cx$.

Or M étant diagonalisable (th. spectral), $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \mathrm{Ker}(M - \lambda I_q)$;

on en déduit $Bx = Cx$ pour tout $x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ d'où $B = C$.

Q 13 (rédaction 2). On reprend les notations précédentes. L'idée principale reste identique, on veut montrer que $Bx = Cx$ pour tout $x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ et pour cela, il suffit de le vérifier sur chacun des sous-espaces propres de M, $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_q)$. Le point crucial de la démonstration est d'obtenir que pour $x \in \mathrm{Ker}(M - \lambda I_q)$, $Bx = Cx = \sqrt{\lambda}\,x$, c'est-à-dire, $x \in \mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q)$ (et $x \in \mathrm{Ker}(B - \sqrt{\lambda} I_q)$)

rédaction 2 : on raisonne sur les dimensions pour montrer que $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_q) = \mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q)$

On souhaite donc montrer l'inclusion $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_q) \subset \mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q)$ (il suffit de le faire pour C, car on en déduira le résultat pour B qui vérifie les mêmes hypothèses que C).

Montrons que $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_q) = \mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda}\, I_q)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$.

L'inclusion $\mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda}\, I_q) \subset \mathrm{Ker}(M - \lambda I_q)$ est élémentaire.

On va montrer l'égalité des dimensions pour conclure.

On a C symétrique réelle donc diagonalisable : $C = P\Delta P^{-1}$ d'où $M = C^2 = P\Delta^2 P^{-1}$.

On en déduit que $\mathrm{Sp}(M) = \{\mu^2, \mu \in \mathrm{Sp}(C)\}$ et comme $\mathrm{Sp}(C) \subset \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Sp}(C) = \{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$. Par conséquent, M et C étant diagonalisable par le théorème spectral,

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim\left[\mathrm{Ker}\left(M - \lambda I_q\right)\right] = q = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(C)} \dim\left[\mathrm{Ker}\left(C - \mu I_q\right)\right] = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim\left[\mathrm{Ker}\left(C - \sqrt{\lambda}\, I_n\right)\right]$$

D'où :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \underbrace{\left[\dim\left(\mathrm{Ker}\left(M - \lambda I_q\right)\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}\left(C - \sqrt{\lambda}\, I_q\right)\right)\right]}_{\geqslant 0 \text{ car } \mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda}\, I_q) \subset \mathrm{Ker}(M - \lambda I_q)} = 0$$

Une somme nulle de nombres positifs ou nuls implique que tous ces nombres sont nuls et on en déduit l'égalité souhaitée pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$:

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\left(M - \lambda I_q\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(C - \sqrt{\lambda}\, I_q\right)\right)$$

Q 13 (rédaction 3) Supposons $C^2 = M$ avec C symétrique réelle. Montrons pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, l'égalité $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_q) = \mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda}\, I_q)$ qui est le point clé de la démonstration.

rédaction 3 : on montre l'égalité $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_q) = \mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda}\, I_q)$ par double inclusion, en utilisant l'égalité $(M - \lambda I_q) = (C + \sqrt{\lambda}\, I_q)(C - \sqrt{\lambda}\, I_q)$

L'inclusion $\mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda}\, I_q) \subset \mathrm{Ker}(M - \lambda I_q)$ est élémentaire.

Montrons l'autre inclusion, $\mathrm{Ker}(M - \lambda I_q) \subset \mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda}\, I_q)$

1er cas : $\lambda = 0$. On a C diagonalisable car symétrique réelle, donc C est semblable à une matrice diagonale Δ donc $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}(\Delta) = \mathrm{rg}(\Delta^2) = \mathrm{rg}(C^2) = \mathrm{rg}(M)$ en utilisant que pour une matrice diagonale $\mathrm{rg}(\Delta) = \mathrm{rg}(\Delta^2)$.

Par le théorème du rang, on en déduit $\dim(\mathrm{Ker}\, C) = \dim(\mathrm{Ker}\, M)$; mais on a aussi $\mathrm{Ker}(C) \subset \mathrm{Ker}(M)$ d'où l'égalité $\mathrm{Ker}(C) = \mathrm{Ker}(M)$.

Deuxième cas : $\lambda > 0$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(M - \lambda I_q)$. On a en posant $y = (C - \sqrt{\lambda}\, I_q)x$:

$$(C + \sqrt{\lambda}\, I_q)y = (C + \sqrt{\lambda} I_q)(C - \sqrt{\lambda}\, I_q)x = (C^2 - \lambda\, I_q)x = (M - \lambda\, I_q)x = 0$$

Donc $y \in \mathrm{Ker}(C + \sqrt{\lambda} I_q)$ et $\mathrm{Ker}(C + \sqrt{\lambda} I_q = \{0\}$ car $-\sqrt{\lambda}$ n'est pas valeur propre de C car C symétrique positive donc ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Donc $y = 0$ soit $x \in \mathrm{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q)$.

Q 14. *Initialisation* : $M_0 = I_q$ est bien définie et on a $c_0(\lambda_i) = 1$ donc :
$P\mathrm{diag}\,(c_0(\lambda_1), \cdots, c_0(\lambda_q))\, P^T = P I_q P^T = I_q$ car $P \in O(q)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $M_n = P\mathrm{diag}\,(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q))\, P^T$.

On a d'après la question Q7, $c_n(\lambda_i) > 0$ donc $\det(M_n) = \prod_{i=1}^{q} c_n(\lambda_i) > 0$ et par conséquent M_n est inversible.

Par conséquent, la matrice $M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + M M_n^{-1}\right)$ est bien définie.

De plus, on a $M_n^{-1} = P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{c_n(\lambda_1)}, \cdots, \frac{1}{c_n(\lambda_q)}\right) P^T$ d'où :

$$\begin{aligned} M M_n^{-1} &= P\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_q)\, \underbrace{P^T P}_{=I_q}\, \mathrm{diag}\left(\frac{1}{c_n(\lambda_1)}, \cdots, \frac{1}{c_n(\lambda_q)}\right) P^T \\ &= P\mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \cdots, \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right) P^T \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + M M_n^{-1}\right) &= \frac{1}{2} P \left[\mathrm{diag}\,(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q)) + \mathrm{diag}\left(\frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \cdots, \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right)\right] P^T \\ &= P\,\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}\left(c_n(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}\right), \cdots, \frac{1}{2}\left(c_n(\lambda_q) + \frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_q)}\right)\right) P^T \\ &= P\,\mathrm{diag}\,(c_{n+1}(\lambda_1), \cdots, c_{n+1}(\lambda_q))\, P^T \end{aligned}$$

Q 15. On a pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ d'après Q9. Donc par la caractérisation de la limite d'une suite de matrices, par la limite des suites coordonnées :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{diag}\,(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q)) = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_q}\right)$$

En utilisant le deuxième point donné en préambule sur la convergence des suites matricielles et le produit (ou 5/2 : l'application $\varphi : M \mapsto PMP^T$ est linéaire sur $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie donc φ est continue), on obtient :

la continuité de $M \mapsto PMP^T$ est importante à invoquer pour le calcul de la limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \left(P\,\mathrm{diag}\,(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q))\, P^T\right) &= \lim_{n \to +\infty} \varphi\left(\mathrm{diag}\,(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q))\right) \\ &= \varphi\left[\lim_{n \to +\infty} \mathrm{diag}\,(c_n(\lambda_1), \cdots, c_n(\lambda_q))\right] \\ &= P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_q}\right) P^T = \sqrt{M} \end{aligned}$$

Q 16. f a au plus un point d'annulation sur I. En effet, si f possède deux points d'annulation c_1 et $c_2 \in I$, avec $c_1 < c_2$. On a $f(c_1) = f(c_2) = 0$. f étant continue sur $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]c_1, c_2[$ alors d'après le théorème de Rolle , il existe $c_3 \in]c_1, c_2[$, $f'(c_3) = 0$ absurde car f' ne s'annule pas sur I.

théorème de Rolle

Q 17. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I donc f'' est continue sur le segment J_r donc f'' est bornée sur J_r (et ses bornes sont atteintes) donc $\sup\limits_{J_r} |f''|$ est bien défini (et c'est un max).

continuité sur un segment : théorème des bornes atteintes

De même f' est continue sur le segment J_r, donc $|f'|$ aussi (par composée de fonctions continues) et donc $|f'|$ est bornée, et elle atteint ses bornes : $i_r = \inf\limits_{J_r} |f'| = \min\limits_{J_r} |f'|$ est bien défini (et l'inf est atteint). De plus, f' ne s'annule pas sur I, donc ne s'annule pas sur J_r donc $i_r = \min\limits_{J_r} |f'| > 0$.

Q 18. I est un intervalle ouvert non vide et $c \in I$ donc il existe $r_0 > 0$ tel que $J_{r_0} \subset I$.

De plus, on a pour tout $r \in]0, r_0]$, $J_r \subset J_{r_0}$ donc $s_r \leqslant s_{r_0}$ et $i_r \geqslant i_{r_0}$ et par conséquent, $K_r \leqslant K_{r_0}$.

Si $K_{r_0} = 0$, alors $r = r_0$ vérifie $rK_r = 0$ donc $0 \leqslant rK_r < 1$.

Si $K_{r_0} > 0$, alors on considère $r \in \left]0, \frac{1}{K_{r_0}}\right[$. On a alors $0 \leqslant rK_r \leqslant rK_{r_0} < 1$.

Autre rédaction : on a pour tout $r \in]0, r_0[$, $0 \leqslant rK_r \leqslant rK_{r_0}$ donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{r \to 0^+} rK_r = 0$ donc il existe $r > 0$ tel que $rK_r < 1$.

Q 19. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J_r et $|f''| \leqslant s_r$. Donc on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 :

$$\left| \underbrace{f(c)}_{=0} - f(c_n) - f'(c_n)(c - c_n) \right| \leqslant \frac{s_r}{2} |c - c_n|^2$$

Par conséquent, en utilisant $|f'(c_n)| > i_r$,

$$|c_{n+1} - c| = \left| \frac{f'(c_n)c_n - f(c_n) - f'(c_n)c}{f'(c_n)} \right| \leqslant \frac{s_r}{2|f'(c_n)|} |c_n - c|^2 \leqslant \frac{s_r}{2i_r} |c_n - c|^2 = K_r |c_n - c|^2$$

On a $c_n \in J_r$ donc $|c_n - c| \leqslant r$ d'où

$$|c_{n+1} - c| \leqslant K_r |c_n - c|^2 \leqslant K_r r^2 = \underbrace{(rK_r)}_{<1} r \leqslant r$$

Par conséquent, $c_{n+1} \in [c - r, c + r] = J_r$.

Q 20. On procède par récurrence sur n.

Initialisation : l'inégalité est une égalité pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $|c_n - c| \leqslant \dfrac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$ et $c_n \in J_r$.

On a alors par la question précédente, $c_{n+1} \in J_r$ et

$$|c_{n+1} - c| \leqslant K_r |c_n - c|^2 \leqslant K_r \left(\frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r} \right)^2 = \frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^{n+1}}}{K_r}.$$

Ce qui achève le raisonnement par récurrence.

De plus, $c_0 \in J_r$ donc $|c_0 - c| \leqslant r$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |c_n - c| \leqslant \frac{(K_r|c_0 - c|)^{2^n}}{K_r} \leqslant \frac{(rK_r)^{2^n}}{K_r}$$

Or $0 \leqslant rK_r < 1$ d'après Q18, $\lim\limits_{n \to +\infty} (rK_r)^{2^n} = 0$ donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} |c_n - c| = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \to +\infty} c_n = c.$$

Q 21. Soit μ une racine complexe de P'. Alors μ n'est pas racine de P car P est scindé à racines simples. Par conséquent , μ n'est pas valeur propre de M donc $M - \mu I_q$ est inversible.

cours : $M - \mu I_q$ inversible ssi $\mu \in \mathrm{Sp}(M)$

On décompose $P' = \prod\limits_{i=1}^{s'} (X - \mu_i)^{n_i}$. On a alors $P'(M) = \prod\limits_{i=1}^{s'} (M - \mu_i I_q)^{n_i}$.

D'après ce qui précède, pour tout $i \in [\![1, s']\!]$, $M - \mu_i I_q$ est inversible, donc $P'(M)$ est un produit de matrices inversibles, donc $P'(M)$ est inversible.

Q 22. On a $\chi_M = \prod\limits_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $\alpha_i \leqslant q$ car $\deg(\chi_M) = q$.

Par conséquent,

$$P^q = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^q = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} (X - \lambda_i)^{q - \alpha_i} = \chi_M \underbrace{\prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{q - \alpha_i}}_{\in \mathbb{C}[X] \text{ car } q \geqslant \alpha_i}$$

Donc χ_M divise P^q, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P^q = \chi_M Q$.

On en déduit $P(M)^q = \chi_M(M)Q(M) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton ($\chi_M(M) = 0$). Donc $P(M)$ est nilpotente.

Q 23. On utilise l'existence de $B_n \in \mathbb{C}[M]$ telle que $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n > q$. On a alors $P(M)^{2^n} = 0$ d'après la question précédente donc, $P(M_n) = 0$ et par conséquent, $M_{n+1} = M_n$. Ce qui montre que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Q 24. Montrons par récurrence que M et M_n commutent.

Init : pour $n = 0$, $M_n = M_0 = M$ donc le résultat est clair.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que M et M_n commutent.

On a $P(M_n) = P(M)^{2^n} B_n$ avec $B_n \in \mathbb{C}[M]$ donc $P(M_n) \in \mathbb{C}[M]$ donc $MP(M_n) = P(M_n)M$.

On a $P(M_n) \in \mathbb{C}[M]$ donc $P'(M_n) \in \mathbb{C}[M]$ donc $MP'(M_n) = P'(M_n)M$ et par conséquent, $MP'(M_n)^{-1} = P'(M_n)^{-1}M$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} MM_{n+1} = \underbrace{MM_n}_{=M_nM} - \underbrace{MP(M_n)}_{=P(M_n)M} P'(M_n)^{-1} = M_nM - P(M_n) \underbrace{MP'(M_n)^{-1}}_{=P'(M_n)^{-1}M} &= \left(M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1}\right) M \\ &= M_{n+1}M \end{aligned}$$

Q 25. En reprenant le raisonnement de la question 23, pour tout n tel que $2^n \geqslant q$, $P(M_n) = 0$ et $M_n = A$. D'où $P(A) = 0$: P est un polynôme annulateur de A , scindé à racines simples donc A est diagonalisable.

caractérisation de A diagonalisable par existence d'un polynôme annulateur scindé simple

Q 26. D'après Q24, M et M_n commutent pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $A = M_{n_0}$, M et A commutent. Par conséquent, $AN = A(M - A) = AM - A^2 = MA - A^2 = (M - A)A = NA$.

Soit n_0 tel que $M_{n_0+1} = A$. On a alors

$$\begin{aligned} N = M - A = M_0 - M_{n_0+1} &= \sum_{n=0}^{n_0} (M_n - M_{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} P(M_n)P'(M_n)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} P(M)^{2^n} B_n P'(M_n)^{-1} \\ &= P(M) \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0} P(M)^{2^n-1} B_n P'(M_n)^{-1}}_{=C} = P(M)C \end{aligned}$$

$P(M)$ et C commute car $B_n \in \mathbb{C}[M]$ et $P'(M_n) \in \mathbb{C}[M]$ donc

$$N^q = P(M)^q C^q = 0 \quad \text{car} \quad P(M)^q = 0 \quad \text{(Q22)}$$

Q 27. On écrit le développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre $q-1$, en reprenant les notations del a question 3 :

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^{n+1} b_n x^n + o(x^{q-1}) = R_q(x) + o(x^{q-1}) \quad \text{avec} \quad R_q(x) = \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^{n+1} b_n x^n$$

Alors par produit de DL :

$$1 + x = \sqrt{1+x}^2 \underset{x\to 0}{=} R_q(x)^2 + o(x^{q-1}) \quad \text{donc} \quad 1 + x - R_q(x)^2 \underset{x\to 0}{=} o(x^{q-1})$$

Par conséquent, le monôme de plus petit degré dans le polynôme $1 + X - R_q(X)^2$ est $a_n X^n$ avec $n \geqslant q$, autrement dit :

$$1 + X - R_q(X)^2 = \sum_{k=q}^{2q-2} a_k X^k = X^q \sum_{k=0}^{q-2} a_{k+q} X^{k+q} = X^q Q(X) \quad \text{avec } Q \in \mathbb{R}[X]$$

Donc X^q divise $1 + X - R_q(X)^2$.

Q 28. Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. Alors $N^q = 0$. Rappelons rapidement pourquoi :

il existe un entier k tel que $N^k = 0$. Alors X^k est un polynôme annulateur de N et les valeurs propres de N appartiennent donc à l'ensemble des racines de X^k, qui est réduit à $\{0\}$. Donc $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$ (le spectre n'est pas vide dans $\mathbb{C}$ car le polynôme caractéristique possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$).

Donc le polynôme caractéristique de N est $\chi_N = X^q$ et donc par le théorème de Cayley-Hamilton, $N^q = 0$.

En reprenant le polynôme R_q de la question précédente, on a :

$$I_q + N - R_q(N)^2 = N^q Q(N) = 0 \quad \text{donc} \quad R_q(N)^2 = I_q + N$$

Donc $R_q(N)$ est une racine carrée de $I_q + N$.

Q 29. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est à coefficients réels :

$M_0 = M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $M_n \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de M sont réelles car M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$; par conséquent, $P = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i) \in \mathbb{R}[X]$.

Donc $P(M_n) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $P'(M_n) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et par conséquent, $P'(M_n)^{-1} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

D'où $M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$. Ce qui termine la récurrence.

La suite (M_n) étant stationnaire ; constante égale à A à partir d'un certain rang, $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Puis $N = M - A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

En reprenant la démonstration de la question Q25, on a $P(A) = 0$, et P est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ (les valeurs propres de M) donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

Q 30. On a $P(A) = 0$ donc toute valeur propre de A est racine de P :

$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$. Donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Q 31. Les valeurs propres de A, notées $\lambda'_1, \cdots, \lambda'_q$, étant strictement positives, on peut reprendre la méthode vue en II.C, pour obtenir une racine carrée de A, à partir de $A = P\,\mathrm{diag}\left(\lambda'_1, \cdots, \lambda'_q\right) P^{-1}$:

en posant $A' = P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda'_1}, \cdots, \sqrt{\lambda'_q}\right) P^{-1}$, on a $(A')^2 = A$.

On a alors $M = A + N = A(I_q + A^{-1}N)$.

Les matrices A et N commutent donc A^{-1} et N commutent donc $(A^{-1}N)^q = (A^{-1})^q N^q = 0$.

$A^{-1}N$ est donc nilpotente donc en utilisant la question Q28, $\left(R_q(A^{-1}N)\right)^2 = I_d + A^{-1}N$.

Les matrices A' et $R_q(A^{-1}N)$ commutent (cf ci-dessous) donc

$$\left(A' R_q(A^{-1}N)\right)^2 = (A')^2 \left(R_q(A^{-1}N)\right)^2 = A(I_q + A^{-1}N) = M$$

Donc $A' R_q(A^{-1}N)$ est une racine carrée de M.

Précisons pourquoi A' et $R_q(A^{-1}N)$ commutent.

En notant $\lambda'_1, \cdots, \lambda'_s$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A.

Alors en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange par exemple, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1, s]\!], \quad \sqrt{\lambda'_i} = Q(\lambda_i)$$

On a alors $A' = P\,\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda'_1}, \cdots, \sqrt{\lambda'_q}\right) P^{-1} = \cdots = Q(A)$ donc $A' \in \mathbb{C}[A]$.

Or $A^{-1}N$ commute avec A car A et N commutent donc A' et $R_q(A^{-1}N)$ commutent.