DM8 (Intégration, séries entières)

À rendre le lundi 6 janvier

Exercice 1 : Obtention d'un équivalent à l'aide d'intégrales (niveau 1)

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Dans toute la suite, on note :

$$S_n = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{(n-\ell)!} \frac{1}{n^\ell}.$$

On souhaite déterminer un équivalent de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I - Une expression intégrale de S_n

Dans cette partie, on détermine une expression de S_n sous la forme d'une intégrale.

1. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et a pour valeur $k!$.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, puis que :

$$S_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Partie II - Un équivalent de S_n

Dans cette partie, on détermine un équivalent de l'intégrale obtenue à la question Q2 lorsque $n \to +\infty$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{n} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_n^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Les résultats de la partie précédente impliquent la convergence de ces deux intégrales.

II. 1 - Étude de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un changement de variable, établir que :

$$J_n = \mathrm{e}^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2+\frac{v}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v.$$

4. Montrer que la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K_n = \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{v}{2n}\right)^n \mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

est bornée. On pourra utiliser librement l'inégalité $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. En déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

II. 2 - Étude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Dans cette sous-partie, on définit la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall u \in]0,+\infty[, \quad f_n(u) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}} & \text{si} \quad u < \sqrt{n} \\ 0 & \text{si} \quad u \geqslant \sqrt{n}. \end{cases}$$

6. Montrer que la fonction f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

7. Montrer que :

$$I_n = \sqrt{n}\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-u\sqrt{n}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u.$$

8. Montrer que pour tout $u \in]0,\sqrt{n}[$, on a l'égalité :

$$\ln\left(f_n(u)\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{u^k}{n^{\frac{k}{2}-1}}.$$

9. En déduire que pour tout $u \in]0,\sqrt{n}[$, on a les inégalités :

$$\left|\ln\left(f_n(u)\right) + \frac{u^2}{2}\right| \leqslant \frac{u^3}{3\sqrt{n}} \qquad , \qquad \ln\left(f_n(u)\right) \leqslant -\frac{u^2}{6}.$$

9. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $u \mapsto e^{-u^2/2}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $u \in]0,+\infty[$, $|f_n(u)| \leqslant e^{-u^2/6}$.

10. - *Question admise pour les 3/2* -
En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$ converge et qu'on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(u)\mathrm{d}u\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

II. 3 - Conclusion

11. En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, déterminer un équivalent de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 : Comportement asymptotique de sommes de séries entières (niveau 2)

NB : Les parties I et III sont accessibles (la partie III est indépendante des parties I et II en admettant la validité de $H_{r,p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $r > 0$). La partie II est plus délicate.

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel *strictement positif.*
On considère la fonction

$$S_{r,p} : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}.$$

L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$S_{r,p}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p}x^r e^x \qquad (H_{r,p}).$$

Cet objectif sera atteint dans la partie II pour le cas $p \geqslant 2$. Dans la partie III, on étudie une application de ce résultat au comportement asymptotique d'une solution particulière d'une certaine équation différentielle d'ordre 2.

Dans tout le sujet, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leqslant x < k+1$. On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

I. Généralités et cas particuliers

1. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et faire de même pour la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(pn)^r}{(pn)!} z^{np}$.
2. Pour x réel, expliciter $S_{0,1}(x)$ et $S_{0,2}(x)$, et en déduire la validité des énoncés $H_{0,1}$ et $H_{0,2}$.

Sujet tronqué : On admet que l'énoncé $H_{r,1}$ est valide pour tout $r > 0$.

II. Démonstration de $H_{r,p}$ pour $p \geqslant 2$

On fixe dans cette partie un entier naturel $p \geqslant 2$ et un réel $r > 0$, et l'on se propose de déduire la validité de $H_{r,p}$ de celle de $H_{r,1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) := \frac{n^r}{n!}x^n.$$

3. On fixe un réel $x > 0$. Étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

   On montrera en particulier que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on notera t_x. En déduire que la suite finie $(u_n(x))_{0\leqslant n\leqslant \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite $(u_n(x))_{n\geqslant \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante.

   L'ensemble $\{u_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ admet donc un maximum valant $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$.
   Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\varphi_x(x+\alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que

$$t_x - x - r \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

   Pour établir ce dernier résultat, on pourra revenir à la définition d'une limite.

5. Montrer que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geqslant m u_{\lfloor x \rfloor}(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } +\infty.$$

En déduire que, pour x voisin de $+\infty$,

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leqslant \frac{x^r e^x}{m}.$$

7. En déduire que pour tout entier relatif k,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(x^r e^x)$$

puis que

$$M_x = \underset{x \to +\infty}{o}(x^r e^x).$$

En vue de ce dernier résultat, on pourra commencer par démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

8. Dans cette question et la suivante, on fixe un nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |D_n| \leqslant \frac{2}{|1 - z|}$$

et que les séries $\sum_n D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum_n D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes.

9. On conserve le nombre complexe z introduit dans la question précédente. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x)) = S_{r,1}(zx)$$

puis que, pour x voisin de $+\infty$,

$$|S_{r,1}(zx)| \leqslant \frac{4 M_x}{|1 - z|},$$

et conclure à la relation

$$S_{r,1}(zx) = \underset{x \to +\infty}{o}(x^r e^x).$$

10. On pose $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x, montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = p S_{r,p}(x)$$

et en déduire la validité de $H_{r,p}$.

III. Application à une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'équation différentielle :

$$(E): \quad tx''(t) - x(t) = 0.$$

11. Montrer que, parmi les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, il en existe une et une seule, notée f, qui soit la somme d'une série entière et vérifie $f'(0) = 1$. Expliciter la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

12. Démontrer que

$$c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} 4^n.$$

Pour la dernière question, on admet le résultat suivant :

Lemme de comparaison asymptotique des séries entières :
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes réels. On suppose que

(i) La série $\sum_n b_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

(ii) Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $b_n > 0$.

(iii) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

Alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

13. En exploitant la validité de $H_{r,p}$ pour un couple (r, p) bien choisi, démontrer l'équivalent

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{2\sqrt{t}}.$$