

Cette épreuve comprend deux parties indépendantes. La première concerne la physique et porte sur l'étude hydrodynamique d'un liquide contenu dans un récipient cylindrique en rotation. La seconde est dédiée à la chimie et s'intéresse aux capsäicinoïdes qui sont une famille d'alcaloïdes rencontrée dans les piments.

→ Le barème étant réparti à poids égal sur les parties physique et chimie, il est conseillé de ne pas consacrer plus de deux heures et trente minutes à chacune d'elles.

→ Les applications numériques seront effectuées avec la précision qu'un calcul à la main permet aisément, et sans excéder deux chiffres significatifs. Les ordres de grandeur seront donnés avec un seul chiffre significatif.

→ Les références des questions abordées devront être indiquées de façon claire.

### Partie Physique : Étude d'un phénomène de diffusion en hydrodynamique.

Nous nous proposons d'étudier le comportement hydrodynamique d'un liquide contenu dans un récipient cylindrique pouvant tourner autour de son axe. Une première partie est consacrée à l'étude du régime permanent pour lequel le récipient tourne à vitesse angulaire constante. La seconde partie s'intéresse à la phase d'arrêt du liquide qui suit l'immobilisation du récipient. Ces deux études sont, en grande partie, indépendantes.

→ Les réponses aux questions relevant de considérations qualitatives devront être systématiquement argumentées et rédigées de façon claire et concise.

#### Présentation de l'étude.

Un récipient cylindrique (1) d'axe (Oz), en communication avec l'air ambiant par son ouverture supérieure, est partiellement rempli par un liquide (considéré comme incompressible). Ce récipient peut tourner autour de son axe (Oz). Le système constitué du récipient et du liquide est supposé présenter une symétrie de révolution autour de l'axe (Oz). Nous notons  $\mathcal{R}_0(O, x, y, z)$  le référentiel du laboratoire (0), que nous considérons comme étant galiléen, et  $\mathcal{R}_1(O, r, \theta, z)$  le repère cylindrique tel que  $\vec{OM} = r \vec{e}_r(\theta) + z \vec{e}_z$  où M est un point considéré du liquide.

Nous notons :  $R$  le rayon du cylindre ;  $H$  sa hauteur ;  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$  sa vitesse angulaire ;  $m$  la masse du liquide ;  $\rho$  sa masse volumique ;  $\eta$  [Pa · s] sa viscosité dynamique ;  $h$  sa hauteur lorsque le récipient est immobile ;  $Z_0$  sa hauteur au centre de la cuve (c'est-à-dire en  $r = 0$ ) ;  $p(M)$  la pression en un point M du fluide ;  $p_0$  la pression (supposée uniforme) de l'air atmosphérique surmontant le liquide ;  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  l'accélération de la pesanteur. La figure (1) représente le système étudié et précise quelques notations.

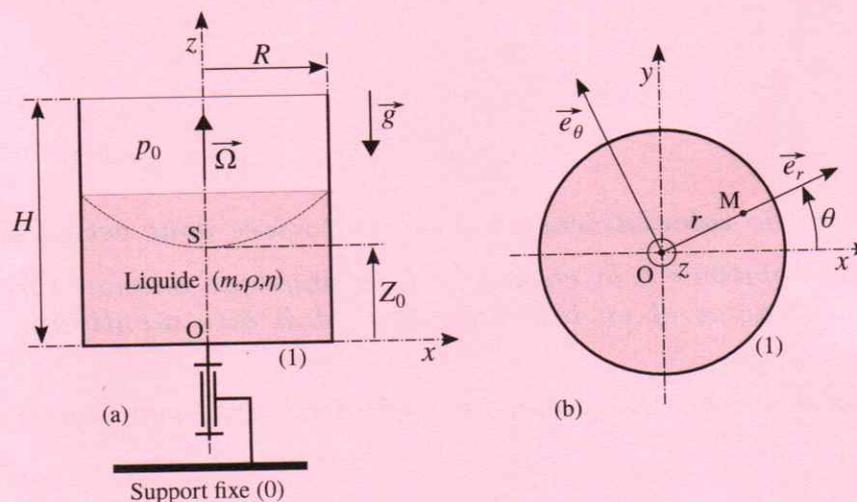


FIGURE 1 – Cylindre (1) en rotation à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$  par rapport au support fixe (0) lié au référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0(O, x, y, z)$ . Il contient le liquide ( $m, \rho, \eta$ ) : (a) vue de côté (en coupe) ; (b) vue de dessus. Un point M du liquide est repéré dans le repère cylindrique  $\mathcal{R}_1(O, r, \theta, z)$ .

Nous conduisons cette étude dans le cadre suivant :

- 30  La vitesse angulaire du cylindre est telle que, d'une part le liquide n'est pas éjecté hors du cylindre, d'autre part le fond de ce dernier reste immergé sur la totalité de sa surface (hypothèse référencée  $\mathcal{H}_\Omega$ ).
- Nous ne prenons pas en compte l'énergie interfaciale du liquide.
- Nous négligeons tout échange d'énergie entre le liquide et l'air ambiant.

### Notations, données et formulaire.

- 35  Pour les applications numériques nous adopterons les valeurs suivantes :
- Accélération de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
  - Rayon du cylindre :  $R = 4 \text{ cm}$
  - Hauteur du cylindre :  $H = 8 \text{ cm}$
  - Hauteur de liquide (cylindre immobile) :  $h = 4 \text{ cm}$
  - 40 • Masse volumique de l'eau :  $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
  - Viscosité dynamique de l'eau :  $\eta = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
  - Capacité calorifique massique de l'eau :  $c_p = 4 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Le vecteur gradient et le laplacien d'un champ scalaire  $\psi = \psi(r, z)$  sont respectivement définis, en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \vec{e}_r(\theta) + \frac{\partial\psi}{\partial z} \vec{e}_z \\ \Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \end{cases} \quad (1)$$

## 1 Étude du régime permanent.

45 Dans l'ensemble de cette section (1), le cylindre tourne à vitesse angulaire constante, entraînant avec lui le liquide. Ce dernier est immobile par rapport au cylindre.

### 1.1 Établissement des équations générales.

Il s'agit ici, en particulier, de caractériser la forme adoptée par la surface du liquide en rotation.

1. Le figure (2) représente l'élément de volume  $d^3\tau = dr \times r d\theta \times dz$  autour d'un point M du liquide, vu de dessus, c'est-à-dire selon  $-\vec{e}_z$ .

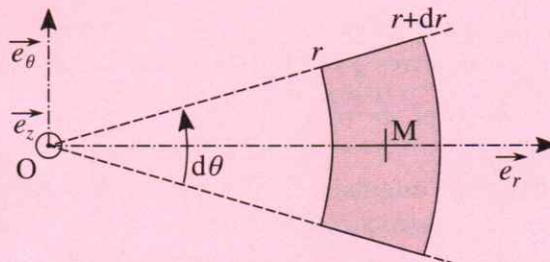


FIGURE 2 – Élément de volume  $d^3\tau = dr \times r d\theta \times dz$  autour d'un point M du liquide, vu selon  $-\vec{e}_z$ .

- 50 Reproduire cette figure et représenter par une flèche l'action de la pression (sous la forme  $\frac{p}{\rightarrow}$ ) sur chacune des surfaces élémentaires délimitant le volume  $d^3\tau$  (sans considérer celles de normales  $\pm \vec{e}_z$ ). On précisera les arguments de chacune des pressions que l'on fera apparaître.

## 2 Étude de la phase d'arrêt.

Nous nous intéressons à la phase d'arrêt du liquide suite à une immobilisation brutale (c'est-à-dire considérée comme quasi instantanée) du cylindre à un instant  $t_0 = 0$  (s) pris comme origine des temps. Le paramétrage géométrique demeure celui indiqué sur la figure (1). En introduisant la dépendance temporelle, nous supposons que la vitesse d'un point M du liquide peut s'écrire sous la forme suivante (hypothèse référencée  $\mathcal{H}_v$ ) :

$$\vec{v}(M, t) = v(r, t) \vec{e}_\theta(\theta) \quad (5)$$

Nous notons  $Z = Z(r, t)$  l'équation caractérisant la surface du liquide, à présent paramétrée par le temps  $t$ .

### 2.1 Aspect énergétique.

Il s'agit d'effectuer un bilan énergétique, portant sur l'ensemble du liquide, entre l'état initial où le liquide tourne en bloc avec le cylindre à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$  constante et l'état final où le liquide s'est totalement immobilisé.

14. Détailler les différentes hypothèses regroupées sous l'hypothèse  $\mathcal{H}_v$ .

15. Donner, sous forme d'une intégrale, l'expression de l'énergie cinétique  $E_c(t)$  du liquide à un instant  $t$  quelconque.

16. Exprimer l'énergie cinétique  $E_{c0}$  du liquide dans l'état initial. On l'écrira sous la forme suivante :

$$E_{c0} = E_c^* (1 + \alpha_c) \quad (6)$$

100 La grandeur positive  $E_c^*$  représente l'énergie cinétique que le liquide aurait, dans l'état initial, si sa surface restait plane et horizontale. Le paramètre  $\alpha_c$  est un rapport positif.

On donnera l'expression de  $E_c^*$  en fonction de la masse  $m$  du liquide,  $R$  et  $\Omega$ , celle de  $\alpha_c$  en fonction de  $k$ ,  $R$  et  $h$ .

105 17. Donner, sous forme d'une intégrale, l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle  $E_p(t)$  du liquide à un instant  $t$  quelconque. On prendra la référence de l'énergie potentielle à l'altitude  $z = 0$  (m).

18. Exprimer l'énergie potentielle  $E_{p0}$  du liquide dans l'état initial. On l'écrira sous la forme suivante :

$$E_{p0} = E_p^* (1 + \alpha_p) \quad (7)$$

La grandeur positive  $E_p^*$  représente l'énergie potentielle du liquide lorsque sa surface est plane et horizontale. Le paramètre  $\alpha_p$  est un rapport positif.

On donnera l'expression de  $E_p^*$  en fonction de la masse  $m$  du liquide,  $g$  et  $h$ , celle de  $\alpha_p$  en fonction de  $k$ ,  $R$  et  $h$ .

19. Établir que la variation d'énergie mécanique  $\Delta E_m = E_m(t \rightarrow \infty) - E_m(t = 0)$  du liquide qui accompagne sa phase d'arrêt s'exprime selon la relation suivante :

$$\Delta E_m = -E_c^* (1 + \alpha) \quad \text{où} \quad \alpha = \alpha^* \frac{R^2 \Omega^2}{gh} \quad (8)$$

110 On précisera la valeur du préfacteur numérique positif  $\alpha^*$ .

*Conseil : On ne remplacera le paramètre  $k$  par son expression en fonction de  $\Omega$  et  $R$  qu'à la dernière étape du calcul.*

115 20. Établir un bilan énergétique (rigoureux et détaillé), portant sur le liquide, entre les situations initiale et finale. Nous supposons, qu'au cours de la phase d'arrêt, l'échange de chaleur entre le liquide et le milieu extérieur (atmosphère et cylindre) peut être négligé.

21. Dédurre de l'analyse précédente l'expression, en fonction de  $g$ ,  $R$ ,  $h$ ,  $\Omega$  et  $c_p$ , de la variation de température  $\Delta T$  du liquide accompagnant son immobilisation.

Estimer la valeur de  $\Delta T$  pour  $\Omega = 6 \text{ rd} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 1 \text{ tr} \cdot \text{s}^{-1}$ . Commenter ce résultat.

120 22. Si le cylindre avait été ralenti progressivement, au lieu d'être immobilisé brutalement, la variation de température du liquide aurait-elle été plus élevée ou plus faible? Une argumentation rigoureuse et claire est attendue.

## 2.2 Évolution du profil radial de vitesse durant la phase d'arrêt.

Nous cherchons à caractériser l'évolution du champ de vitesse dans le fluide (dont la forme est donnée par l'équation (5)) après l'immobilisation brutale (à  $t = 0$  (s)) du cylindre qui l'entraînait initialement à la vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$  constante.

La contrainte de cisaillement  $\vec{\tau}$  [Pa] agissant sur un élément de surface  $d^2S_{\theta,z} = r d\theta \times dz$  du liquide, centré sur le point  $M(r, \theta, z)$  et orienté par la normale  $\vec{e}_r(\theta)$ , s'exprime, en repère cylindrique, par la relation suivante :

$$\vec{\tau}(M, t) = \eta \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \vec{e}_\theta(\theta) = \tau(r, t) \vec{e}_\theta(\theta) \quad \text{où } \eta \in \mathbb{R}_+ \text{ désigne la viscosité dynamique du liquide. (9)}$$

Le produit  $\vec{\tau} d^2S_{\theta,z}$  représente la force tangentielle élémentaire que le domaine de liquide ( $r' > r$ ) exerce sur le domaine de liquide ( $r' < r$ ), à travers l'élément de surface  $d^2S_{\theta,z}$  (se reporter à la figure (3)).

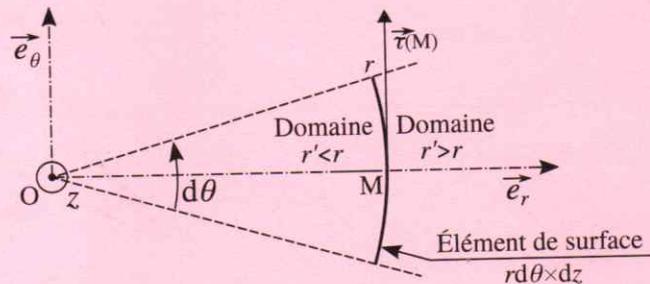


FIGURE 3 – Contrainte de cisaillement  $\vec{\tau}(M)$  que le domaine de liquide ( $r' > r$ ) exerce sur le domaine de liquide ( $r' < r$ ), à travers l'élément de surface  $rd\theta \times dz$  orienté par la normale  $\vec{e}_r(\theta)$ .

□ Compte tenu de la forme du champ de vitesse (donné par l'équation (5)), nous admettrons que :

- toute surface élémentaire de normale  $-\vec{e}_z$  ou  $+\vec{e}_z$  n'est soumise à aucune contrainte de cisaillement ;
- $d\vec{v}/dt = \partial\vec{v}/\partial t$ .

23. Si l'on s'inspirait de la forme de l'expression, en repère cartésien, de la contrainte de cisaillement pour en déduire celle en repère cylindrique on omettrait le terme  $v/r$  apparaissant dans l'équation (9). Proposer un argument (très simple) en faveur de sa présence.

24. Nous considérons un domaine annulaire élémentaire de liquide, d'axe ( $Oz$ ) et de volume  $d^2V = 2\pi r dr dz$ . Établir l'inventaire des forces agissant sur ce domaine élémentaire. Identifier celles pouvant être responsables d'une composante de moment, selon l'axe ( $Oz$ ), agissant sur ce domaine élémentaire.

25. Exprimer la composante, selon l'axe ( $Oz$ ), du moment cinétique  $d^2\sigma_z$  du domaine élémentaire, par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_0$ . On fera apparaître, dans cette expression, la vitesse  $v$ .

En appliquant le théorème du moment cinétique à ce domaine élémentaire, par rapport au point ( $O$ ), établir l'équation aux dérivées partielles liant la vitesse  $v(r, t)$  à la contrainte  $\tau(r, t)$ . On se placera dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$ .

26. Établir que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la vitesse  $v(r, t)$  prend la forme suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left( \Delta v - \frac{v}{r^2} \right) \quad \text{où } \nu = \frac{\eta}{\rho} \text{ désigne la viscosité cinématique du liquide. (10)}$$

27. Associer, à l'équation aux dérivées partielles (10), les conditions initiale et limite devant être vérifiées par le champ de vitesse  $v(r, t)$ .

• Afin d'obtenir une équation plus aisément interprétable décrivant l'évolution spatio-temporelle du champ de vitesse, nous introduisons le vecteur vorticité qui lui est associé. Pour la forme du champ de vitesse donnée par l'équation (5), ce vecteur s'exprime par la relation suivante :

$$\vec{\omega}(M, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv(r, t)) \vec{e}_z = \omega(r, t) \vec{e}_z \quad (11)$$

Dans la suite, nous appellerons "vorticité" la composante  $\omega$ .

- 145 **28.** Exprimer la vitesse  $v(r, t)$  sous forme d'une intégrale portant sur la vortacité  $\omega$ . On veillera à distinguer la variable  $r$  de la variable muette (par exemple,  $u$ ) d'intégration spatiale.
- 29.** Exprimer, à partir du résultat précédent, chacune des dérivées partielles  $\partial v/\partial t$ ,  $\partial v/\partial r$  et  $\partial^2 v/\partial r^2$ . Établir enfin que la vortacité  $\omega(r, t)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \Delta \omega \quad (12)$$

- 150 **30.** Présenter les propriétés de l'équation (12) puis caractériser le phénomène qu'elle décrit. Proposer une analogie de la situation étudiée dans un autre domaine de la physique. S'en inspirer pour définir, sous forme algébrique, un flux surfacique de vortacité que nous noterons  $\varphi_\omega$  (grandeur scalaire, fonction de  $r$  et  $t$ ). On choisira son expression de telle manière que  $[\varphi_\omega] = \text{LT}^{-2}$ .
- 31.** Exprimer la solution stationnaire générale  $\omega = \omega(r)$  de l'équation (12) puis celle à retenir dans le cadre de notre étude. En déduire l'expression de la vitesse  $v = v(r)$  correspondante. Indiquer quelle(s) situation(s) cette solution peut décrire. Commenter brièvement ce résultat.
- 155 **32.** Représenter (qualitativement mais avec soin), sur le même graphique, l'allure du profil radial de vitesse  $v(r, t)$  dans la situation initiale ( $t_0 = 0^-$  (s)) puis pour trois instants ultérieurs ( $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$ ). Faire de même, sur un autre graphique, pour la vortacité  $\omega(r, t)$ . Indiquer, par une flèche ( $\frac{\varphi_\omega}{\rightarrow}$ ), le sens du flux surfacique de vortacité  $\varphi_\omega$  introduit à la question (30).

• L'équation (12) n'admet pas de solution analytique générale. Nous nous proposons alors d'accéder à un temps caractéristique  $\tau$  d'immobilisation du liquide à partir d'un bilan<sup>1</sup>, portant sur l'ensemble du liquide et concernant la grandeur que nous appellerons "quantité de vortacité", dans le cadre d'un modèle très simple. La quantité de vortacité présente la dimension du produit d'un volume par une vortacité. Nous notons  $\omega_0(t) = \omega(0, t)$  la grandeur caractéristique que nous associons à la vortacité dans le liquide.

- 33.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction du temps  $\omega_0$  (on introduira les grandeurs caractéristiques nécessaires). Exprimer le temps caractéristique  $\tau$  qui y apparaît.
- 165 **34.** Estimer la valeur du temps caractéristique  $\tau$ . Expérimentalement on obtient  $\tau_{\text{exp}} \sim 1$  min, pour une vitesse angulaire initiale  $\Omega$  voisine de  $1 \text{ tr} \cdot \text{s}^{-1}$ . Proposer des explications à l'écart entre la valeur de  $\tau$  et celle de  $\tau_{\text{exp}}$ . On se reportera, en particulier, à la réponse donnée à la question (14).

---

1. C'est une alternative à une analyse dimensionnelle.