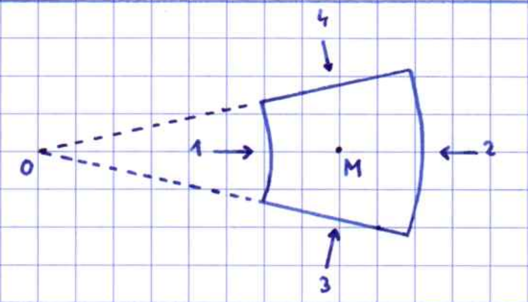
ENS Lyon . Physique Chimie . PC . 2022

1 . Etude en régime permanent

1 .



1 : $P(r,z)$
2 : $P(r+dr,z)$
3 : $P(r,z)$
4 : $P(r,z)$

2 . Equation fondamentale de la statique des fluides dans le référentiel R_1 lié au récipient.
R_1 est non galiléen car en rotation par rapport à R.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \vec{f}_{v_{pesanteur}} + \vec{f}_{v_{ie}} \quad \text{avec : } \vec{f}_{v_{pesanteur}} = \rho\vec{g}$$

$$\vec{f}_{v_{ie}} = \rho\Omega^2\overrightarrow{HM} = \rho\Omega^2\overrightarrow{OM} = \rho\Omega^2 r\,\vec{e}_r \quad (H = O \text{ ici})$$

donc : $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \rho\vec{g} + \rho\Omega^2 r\,\vec{e}_r}$

3 . En projection dans la base cylindrique : $\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r} &= \rho\Omega^2 r\\ \frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho g\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{P(r,z) = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 - \rho g z + A}$

4 . En surface $P = P_0$, donc : $\begin{cases} P_0 = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 - \rho g Z + A \\ P_0 = 0 - \rho g Z_0 + A \end{cases} \Rightarrow A = P_0 + \rho g Z_0$

$$\Rightarrow \boxed{Z = Z_0 + \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{g}r^2}$$

5 . On cherche la force de pression totale exercée par le liquide sur le fond du récipient :

$$\vec{F}_{fluide \to fond} = \iint_{fond} -P(r,z=0)\,dS\,\vec{e}_z = -\iint_{fond}\left[\frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 + P_0 + \rho g Z_0\right] r\,dr\,d\theta\;\vec{e}_z$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\rho\Omega^2 . \frac{R^4}{4} . 2\pi + P_0\pi R^2 + \rho g Z_0 \pi R^2\right]\vec{e}_z$$

$$= -\left[\frac{1}{4}\rho\pi\Omega^2 R^4 + P_0\pi R^2 + \rho g Z_0\pi R^2\right]\vec{e}_z$$

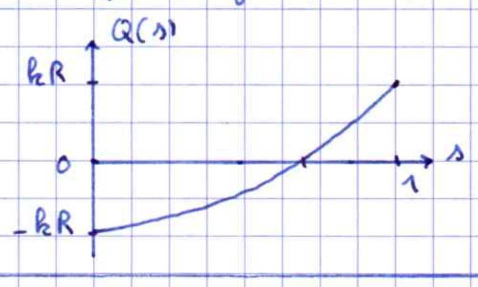
On traduit maintenant l'équilibre du liquide selon Oz : $F_{z\,fond \to fluide} - mg - P_0\pi R^2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\rho\pi\Omega^2 R^4 + P_0\pi R^2 + \rho g Z_0 \pi R^2 - \rho\pi R^2 h g - P_0\pi R^2 = 0$$

$$\Rightarrow Z_0 = h - \frac{1}{4}\frac{\Omega^2 R^2}{g}$$

D'où : $\boxed{Z = h + \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{g}(2r^2 - R^2)}$ $\quad \boxed{k = \frac{\Omega^2}{4g}}$

$$Q = \frac{Z-h}{R} = \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{g}\left(\frac{2r^2}{R} - R\right) = \frac{1}{4}\frac{\Omega^2 R}{g}\left(\frac{2r^2}{R^2} - 1\right) = \frac{1}{4}\frac{\Omega^2 R}{g}(2s^2 - 1)$$



Fonction qui s'annule pour $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$

6\. $Z(R) < H \Rightarrow h + \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{g}R^2 < H \Rightarrow \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{g}R^2 < \frac{H}{2}$ car $h = \frac{H}{2}$

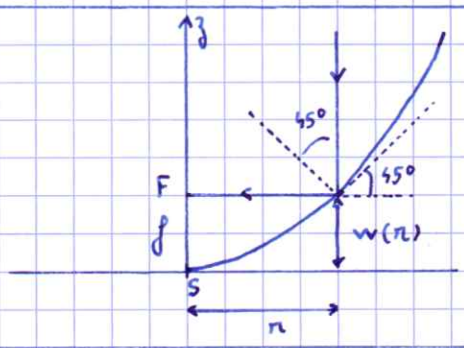
Donc : $\boxed{\Omega < \frac{\sqrt{2gH}}{R}}$

7\. $\vec{f}_{v\,pesanteur}$ et $\vec{f}_{v\,ie}$ sont toutes les deux proportionnelles à ρ.

ρ va se simplifier dans les équations

8\. Le flotteur va matérialiser une particule de fluide. Or le fluide est en équilibre relatif dans le référentiel R_1. Donc le flotteur va être en équilibre relatif quelle que soit sa position sur la surface. Cela serait valable aussi en l'absence de rotation (surface libre plane)

9\.



Om considère le rayon réfléchi à 90°.
La tangente à la parabole au point d'incidence doit être inclinée à 45°

$\Rightarrow w'(r) = 4kr = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{4k}$

$\Rightarrow f = w\left(\frac{1}{4k}\right) = 2k\,\frac{1}{16k^2} = \frac{1}{8k} \Rightarrow \boxed{f = \frac{g}{2\Omega^2}}$

10\. $f = 10\,m \Rightarrow \Omega = 0,7\ rad\,s^{-1} \simeq$ 7 tours. min^{-1}

11\. Les deux images se forment au foyer F. Le détecteur doit être placé à cet endroit

12\. Le réflecteur parabolique est rigoureusement stigmatique contrairement au miroir sphérique

13\. Avec un telescope de grand diamètre on a une meilleure résolution (la diffraction est plus faible) et on peut observer des étoiles moins lumineuses car on a plus de chances d'intercepter les photons.

2\. Etude de la phase d'arrêt

14\. On suppose que :

- $\vec{v}$ n'a pas de composante selon Oz. En réalité $\vec{v}$ en a une car, pour passer de la surface libre parabolique à $t=0$ à la surface libre plane à l'arrêt, le fluide doit se déplacer verticalement
- $\vec{v}$ ne dépend pas de z. En réalité $\vec{v}$ doit dépendre de z car les conditions aux limites sont différentes en $z=0$ et à la surface.

15\. $E_c(t) = \iiint_{fluide} \frac{1}{2}\rho\, d\tau\, \vec{v}^2 = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{Z(r,t)} \frac{1}{2}\rho\, r\,dr\,d\theta\,dz\, v^2(r,t)$

$= \int_0^R \frac{1}{2}\rho\, r\,dr \,.\, 2\pi \,.\, Z(r,t)\, v^2(r,t)$

donc: $\boxed{E_c(t) = \pi\rho\int_0^R Z(r,t)\, r\,dr\, v^2(r,t)}$

16\. Le fluide étant immobile par rapport au cylindre, sa vitesse dans le référentiel du laboratoire est celle d'un solide en rotation autour d'un axe fixe, soit : $v(r) = r\Omega$

$$\int_0^R \left[h + \frac{\Omega^2}{4g}(2r^2 - R^2)\right] r^3 dr\, \Omega^2 = h\Omega^2\int_0^R r^3 dr + \frac{\Omega^4}{2g}\int_0^R r^5 dr - \frac{\Omega^4 R^2}{4g}\int_0^R r^3 dr$$

$$= h\Omega^2\frac{R^4}{4} + \frac{\Omega^4 R^6}{12g} - \frac{\Omega^4 R^6}{16g}$$

$$= h\Omega^2\frac{R^4}{4} + \frac{\Omega^4 R^6}{48g}$$

Donc : $\boxed{E_{c0} = \pi\rho \frac{\Omega^2 R^4}{4}\left[h + \frac{\Omega^2 R^2}{12 g}\right]}$

On calcule : $E_c^* = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^h \frac{1}{2}\rho\, r\,dr\,d\theta\,dz\,(r\Omega)^2 = \frac{1}{2}\rho\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\Omega^2 h = \pi\rho h\frac{R^4\Omega^2}{4}$

Donc : $\boxed{E_c^* = \frac{1}{4}\pi\rho h R^4\Omega^2} = \frac{1}{4} m R^2\Omega^2$ avec $m = \rho\pi R^2 h$

Puis : $\boxed{E_{c0} = E_c^*\left(1 + \frac{\Omega^2 R^2}{12 g h}\right)}$ $\boxed{\alpha_c = \frac{\Omega^2 R^2}{12 g h} = \frac{k R^2}{3 h}}$

17. $E_p = \iiint_{fluide} \rho\, d\tau\, g z = \int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{Z(r,t)} \rho\, r\,dr\,d\theta\,dz\, g z = \rho g\int_0^R r\,dr\cdot 2\pi\cdot\frac{Z^2(r,t)}{2}$

Donc : $\boxed{E_p = \pi\rho g\int_0^R Z^2(r,t)\, r\,dr}$

18. $E_{p0} = \pi\rho g\int_0^R \left[h + k(2r^2 - R^2)\right]^2 dr\, r$

$= \pi\rho g\int_0^R \left[h^2 + k^2(2r^2-R^2)^2 + 2hk(2r^2-R^2)\right] r\,dr$

$= \pi\rho g\int_0^R \left[h^2 + k^2(4r^4 + R^4 - 4r^2R^2) + 2hk(2r^2-R^2)\right] r\,dr$

$= \pi\rho g\left(h^2\frac{R^2}{2} + 4k^2\frac{R^6}{6} + k^2R^4\cdot\frac{R^2}{2} - 4k^2R^2\frac{R^4}{4} + 4hk\frac{R^4}{4} - 2hkR^2\frac{R^2}{2}\right)$

$\boxed{E_{p0} = \pi\rho g\left(\frac{h^2R^2}{2} + \frac{k^2R^6}{6}\right)}$

On a aussi : $E_p^* = \iiint_{000}^{R\,2\pi\,h} \rho\, r\,dr\,d\theta\,dz\, g z = \rho g\cdot 2\pi\cdot\frac{R^2}{2}\cdot\frac{h^2}{2} = \pi\rho g R^2\frac{h^2}{2}$

avec $m = \rho\pi R^2 h$, on a : $\boxed{E_p^* = m g\frac{h}{2}}$

Puis : $\boxed{E_{p0} = E_p^*\left(1 + \frac{k^2R^4}{3h^2}\right)}$ $\boxed{\alpha_p = \frac{k^2R^4}{3h^2}}$

19. On a : $E_m(t\to+\infty) = 0 + E_p^*$

$E_m(t=0) = E_{c0} + E_{p0} = E_c^*(1+\alpha_c) + E_p^*(1+\alpha_p)$

Donc : $\Delta E_m = -E_c^*(1+\alpha_c) - E_p^*\alpha_p$

Or : $E_p^* = \pi\rho g R^2\frac{h^2}{2} = (\pi\rho h R^2)\, g\frac{h}{2} = \left(\frac{4E_c^*}{R^2\Omega^2}\right)\cdot g\frac{h}{2}$

Donc : $\Delta E_m = -E_c^*(1+\alpha_c) - \frac{2gh}{R^2\Omega^2}\alpha_p E_c^*$

$= -E_c^*\left(1 + \alpha_c + \frac{2gh}{R^2\Omega^2}\alpha_p\right)$

D'où : $\alpha = \alpha_c + \frac{2gh}{R^2\Omega^2}\alpha_p = \frac{\Omega^2R^2}{12gh} + \frac{2gh}{R^2\Omega^2}\cdot\frac{R^4}{3h^2}\cdot\frac{\Omega^4}{16g^2} = \frac{\Omega^2R^2}{12gh} + \frac{\Omega^2R^2}{24gh} = \frac{1}{8}\frac{\Omega^2R^2}{gh}$

On a bien : $\boxed{\Delta E_m = -E_c^*(1+\alpha)}$ $\boxed{\alpha^* = \frac{1}{8}}$

20. Premier principe de la thermodynamique au fluide : $\Delta E_m + \Delta U = Q + W_{ext\,non\,conservatives}$

- $Q = 0$ par hypothèse de l'énoncé
- $W_{ext\,non\,conservative} = 0$ car :
  - les forces de pression ne travaillent pas car elles sont normales
  - les forces de viscosité ne travaillent pas car le fluide a une vitesse nulle par rapport aux parois

Donc : $\boxed{\Delta E_m + \Delta U = 0}$

21. $\Delta U = m c_p \Delta T = E_c^*(1+\alpha)$

Donc : $\Delta T = \frac{E_c^*}{m c_p}(1+\alpha) = \frac{\frac{1}{4} m R^2 \Omega^2}{m c_p}(1+\alpha)$

Soit : $\boxed{\Delta T = \frac{R^2\Omega^2}{4 c_p}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{R^2\Omega^2}{gh}\right)}$ A.N : $\Delta T \simeq 4.10^{-6}$ K très faible

22. ΔU et ΔE_m ne dépendent que des états extrêmes et pas de la nature de la transformation. ΔT est inchangée

23. Si le fluide tourne comme un solide, on a : $\vec{v} = r\Omega \vec{e}_\theta$
Dans ce cas il n'y a pas de frottement entre le domaine $r' < r$ et le domaine $r' > r$
$\Rightarrow$ on doit avoir $\vec{\tau} = \vec{0}$
Sans le terme en $\frac{v}{r}$: $\vec{\tau} = \eta \frac{\partial v}{\partial r} \vec{e}_\theta = \eta \Omega \vec{e}_\theta \neq \vec{0}$

Avec le terme en $\frac{v}{r}$: $\vec{\tau} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\vec{e}_\theta = \eta\left(\Omega - \frac{r\Omega}{r}\right)\vec{e}_\theta = \vec{0}$

D'où la nécessité du terme en $\frac{v}{r}$

24.
- poids selon Oz donc de moment nul par rapport à Oz
- forces de pression sur les faces en z et en $z+dz$. De moment nul par rapport à Oz
- forces de pression radiales sur les faces en r et $r+dr$. De moment nul par rapport à Oz.
- forces de viscosité orthoradiales sur les faces en r et $r+dr$. Elles ont un moment non nul selon Oz.

25. $d^2\sigma_z = \delta m\, r v = \rho 2\pi r\, dr\, dz\, r v$ donc : $\boxed{d^2\sigma_z = \rho 2\pi r^2 dr\, dz\, v}$

$\frac{d(d^2\sigma_z)}{dt} = \mathcal{M}_{ext}(Oz)$ d'après le théorème scalaire du moment cinétique

$= \mathcal{M}_{\text{force de viscosité en } r}(Oz) + \mathcal{M}_{\text{force de viscosité en } r+dr}(Oz)$

$= -\tau(r,t) . 2\pi r dz . r + \tau(r+dr,t)\, 2\pi(r+dr)dz . (r+dr)$

$= 2\pi dz \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \tau(r,t)\right) dr$

$\Rightarrow \rho \cancel{2\pi} r^2 \cancel{dr} \cancel{dz} \frac{\partial v}{\partial t} = \cancel{2\pi} \cancel{dz} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \tau(r,t)\right) \cancel{dr}$

$\Rightarrow \rho r^2 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \tau(r,t)\right)$

Soit : $\boxed{\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{2}{r}\tau(r,t)}$

26. Alors : $\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - 2\frac{v}{r^2}\right]$

$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\left[\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}}_{= \Delta v} - \frac{v}{r^2}\right]$

donc : $\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\left[\Delta v - \frac{v}{r^2}\right]}$

27. Condition initiale : $v(r,0) = r\Omega$

Condition aux limites : $v(r=R,t) = 0$ (paroi du cylindre fixe)

28. On a : $\frac{\partial}{\partial r}(r v(r,t)) = r\omega(r,t) \Rightarrow r v(r,t) = \int_0^r u\,\omega(u,t)\,du$

Donc : $\boxed{v(r,t) = \frac{1}{r}\int_0^r u\,\omega(u,t)\,du}$

29. • $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r}\int_0^r u\,\frac{\partial \omega}{\partial t}(u,t)\,du$

• $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\int_0^r u\,\omega(u,t)\,du + \omega(r,t)$

• $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3}\int_0^r u\,\omega(u,t)\,du - \frac{1}{r}\omega(r,t) + \frac{\partial \omega}{\partial r}$

$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{v}{r^2}\right]$ d'après l'équation (10), devient :

$$\frac{1}{r}\int_0^r u\,\frac{\partial \omega}{\partial t}(u,t)\,du = \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{v}{r^2}\right]$$

$$= \nu\left[-\frac{1}{r^3}\cancel{\int_0^r u\,\omega(u,t)\,du} + \cancel{\frac{\omega(r,t)}{r}} + \frac{2}{r^3}\cancel{\int_0^r u\,\omega(u,t)\,du} - \cancel{\frac{\omega(r,t)}{r}} + \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r^3}\cancel{\int_0^r u\,\omega(u,t)\,du}\right]$$

$$= \nu\frac{\partial \omega}{\partial r}$$

Donc : $\int_0^r u\,\frac{\partial \omega}{\partial t}(u,t)\,du = \nu\frac{\partial \omega}{\partial r}(r,t)\cdot r$

On dérive par rapport à r : $r\frac{\partial \omega}{\partial t}(r,t) = \nu\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}(r,t)\right) = \nu r\,\Delta\omega(r,t)$

On obtient bien : $\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu\,\Delta\omega}$

30. C'est une <u>équation de diffusion</u>. Propriétés :
- linéarité
- unicité de la solution
- irréversibilité

En diffusion de particules : $\frac{\partial n}{\partial t} = D\,\Delta n$ avec $\vec{j}_n = -D\,\vec{\text{grad}}\,n$

Par analogie : $\boxed{\varphi_\omega = -\nu\frac{\partial \omega}{\partial r}}$

31. En régime stationnaire : $\Delta\omega = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right) = 0$

$\Rightarrow r\frac{d\omega}{dr} = A$

$\Rightarrow \omega(r) = A\ln r + B$ $\quad$ A et B constantes

ω doit rester finie en $r = 0 \Rightarrow A = 0$ donc : $\boxed{\omega(r) = B}$ uniforme

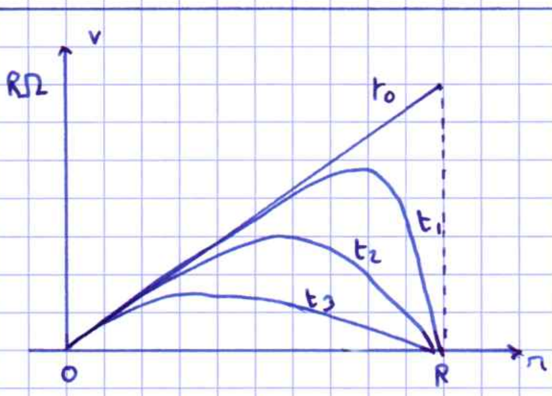
Puis : $\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(rv) = Br$

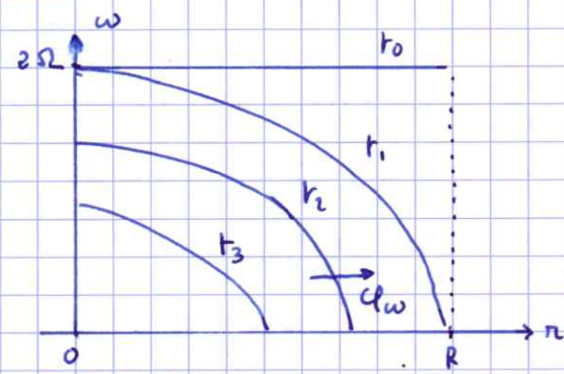
$\Rightarrow r v(r) = B\frac{r^2}{2} + C$

$\Rightarrow v(r) = \frac{1}{2}Br + \frac{C}{r}$ $\quad$ $C = 0$ pour que v soit finie en $r = 0$

Donc : $\boxed{v(r) = \frac{\omega}{2}r}$ Champ de vitesse d'un solide en rotation à la vitesse angulaire $\Omega = \frac{\omega}{2}$

32 -





$$\frac{\partial \omega}{\partial r} < 0 \Rightarrow \varphi_\omega > 0$$

33 - Bilan de vorticité pour le volume $\pi R^2 h$ de fluide entre t et t+dt :
Quantité de vorticité à t+dt = Quantité de vorticité à t − quantité de vorticité sortant à travers la paroi latérale

$$\omega_0(t+dt)\,\pi R^2 h = \omega_0(t)\,\pi R^2 h - \varphi_\omega . 2\pi R h . dt$$ avec : $\varphi_\omega = -\nu \frac{d\omega}{dr}$ $\quad \frac{d\omega}{dr} \simeq -\frac{\omega_0}{R} < 0$

$$\frac{d\omega_0}{dt}\, dt . R^2 = -\frac{\nu\omega_0}{R} . 2R\,dt \qquad\qquad = \nu\frac{\omega_0}{R}$$

donc : $\boxed{\frac{d\omega_0}{dt} + \frac{2\nu}{R^2}\omega_0 = 0}$ <u>temps caractéristique</u> : $\boxed{\tau = \frac{R^2}{2\nu}}$

34 - A.N : $\tau \simeq \frac{(4.10^{-2})^2}{2.10^{-6}} = \underline{800\ s}$

Dans cette partie on a négligé tout phénomène selon Oz.
Or le passage de la surface libre parabolique à la surface libre plane n'est pas négligeable sur la faible hauteur h = 4 cm.
Cela peut expliquer l'écart important entre t_{exp} et τ