

VENDREDI 19 AVRIL 2024
08h00 - 13h00
FILIÈRE PC – Épreuve n°9
PHYSIQUE-CHIMIE (L)

Durée : 5 heures

- L'utilisation de calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
- Les parties relatives à la chimie et à la physique doivent être rédigées sur des copies distinctes, en tête desquelles doit être mentionné respectivement "Physique-Chimie / Chimie" et "Physique-Chimie / Physique".
- Pour chacune de ces parties, les copies doivent être numérotées depuis 1.

Cette épreuve comprend deux parties indépendantes. La première concerne la physique et s'intéresse au phénomène de stick-slip. La seconde est dédiée à la chimie et propose une étude des réacteurs électrochimiques.

- Le barème est réparti à poids égal sur les parties physique et chimie. Il est conseillé de ne pas consacrer plus de deux heures et trente minutes à chacune d'elles.
- Les résultats des applications numériques, ainsi que les ordres de grandeur, seront donnés avec un chiffre significatif.
- Les références des questions abordées devront être indiquées de façon claire.

Partie Physique

Une étude du phénomène de stick-slip

Il s'agit d'étudier le phénomène de stick-slip (ou coller-glisser, ou encore glissement saccadé) à l'origine, en particulier, du son émis lorsque l'on fait glisser un solide sur un autre, sous certaines conditions. Le cissement parfois produit par le frottement d'un bâton de craie contre la surface d'un tableau ou par un système de freinage sont des manifestations bien connues de ce phénomène.

Cette étude comprend deux parties. La première s'intéresse à décrire le phénomène de stick-slip à partir d'un système modèle. La seconde applique les résultats établis à l'étude du cissement produit par le frottement d'un bâton de craie contre la surface d'un tableau. La seconde sous-partie de la seconde partie est en lien direct avec la première partie.

- Les réponses aux questions, en particulier lorsqu'elles relèvent de considérations qualitatives, devront être systématiquement argumentées. En outre, elles devront être rédigées de façon lisible, claire et concise.

1 Étude d'un système modèle.

Le système représenté sur la figure (1) permettra de mettre en place, dans une situation simple, les mécanismes physiques fondamentaux sur lesquels repose le phénomène de stick-slip. Un solide (1) homogène, de masse M , de centre de masse G et de forme parallélépipédique, repose sur une surface plane horizontale (0). Cette dernière est immobile dans le référentiel d'étude $R(O, x, y, z)$ supposé galiléen.

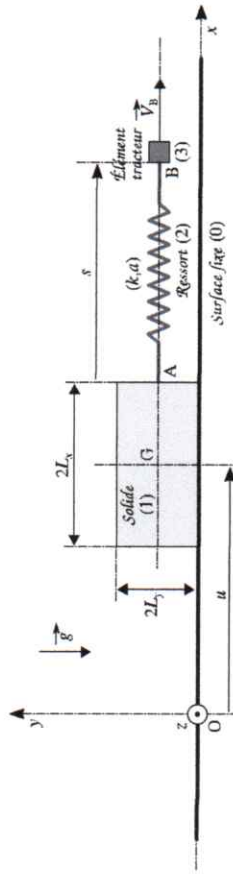


FIGURE 1 Système mécanique étudié : le solide (1) est entraîné en translation, par l'intermédiaire d'un ressort (2), par un opérateur extérieur qui déplace l'élément (3) selon la direction (Ox).

Le solide (1) est soumis au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ ($g > 0$) et est, par ailleurs, en liaison élastique avec un élément tracteur (3) par l'intermédiaire d'un ressort (2) (horizontal) de raideur k et de longueur à vide a . Un opérateur extérieur fixe la vitesse $\vec{V}_B = V_B\vec{e}_x$ ($V_B \geq 0$) de l'élément (3). Nous notons $\vec{R} = T\vec{e}_x + N\vec{e}_y$ la résultante des actions de contact qu'exerce la surface (0) sur le solide (1), et $\vec{F}_R = F_R\vec{e}_x$ la force que le ressort (2) exerce sur le solide (1), au point A.

Nous notons $s = x_B - x_A$ la différence des abscisses des points B et A correspondant aux extrémités du ressort (2) (la différence $(s - a)$ est l'élongation du ressort), u l'abscisse du centre de masse G du solide (1) et $v = \dot{u}$ sa vitesse.

- Nous adoptons le modèle de frottement solide suivant (établi sur la base des lois phénoménologiques de AMONTONS-COULOMB) :

- Si $v = 0$, alors $T < f_s N$ (état d'adhérence) ;
- Si $|T|$ atteint $f_s N$, le glissement apparaît (transition adhérence $\rightarrow$ glissement) ;
- Si $v \neq 0$, alors $T = f_d |N|$ et $T v < 0$ (état de glissement) ;

Les paramètres f_s et f_d ($0 < f_d < f_s$) sont, respectivement, les coefficients de frottement statique et dynamique. Ils sont supposés constants.

1. Nous supposons que $V_B = 0$ et que le ressort a été tendu, mais de telle façon que le solide (1) reste immobile.

Rappeler à quelles conditions un solide soumis à trois forces est à l'équilibre. Représenter, sur un schéma, le solide (1) et les trois forces auxquelles il est soumis. On veillera à situer correctement l'axe portant la réaction $\vec{R}$ qu'exerce la surface (0) sur ce solide, ainsi que le point I d'application de cette réaction.

2. Nous supposons que l'opérateur extérieur, en déplaçant l'élément (3), fait croître progressivement la force F_R , depuis la valeur nulle.

En raisonnant sur la figure tracée précédemment, déterminer à quelle condition, portant sur L_x , L_y et f_s , le solide (1) atteindra le glissement, sans avoir basculé.

Dans la suite, nous supposons que cette condition est toujours satisfaite.

3. Nous posons $\alpha = T/(Mg)$. Représenter graphiquement la dépendance de la fonction $1/\alpha = \alpha(v)$ vis-à-vis de la vitesse v .

- Nous supposons, qu'à l'instant initial, le solide (1) est au repos, $u(t=0) = 0$, $s(t=0) = a$ (ressort sans tension) et que la vitesse de l'élément (3) passe "instantanément" de la valeur nulle à une valeur V_B constante fixée.

4. Écrire, dans le cas général, le principe fondamental de la dynamique appliqué au solide (1). Établir qu'il conduit à l'équation différentielle suivante (pour les conditions initiales choisies) :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \alpha g + \omega_0^2 V_B t \quad (\text{en adoptant la notation } \ddot{u} = d^2 u / dt^2) \quad (1)$$

où ω_0 ($\omega_0 \geq 0$) est un paramètre dont on donnera l'expression.

5. Commenter brièvement l'équation différentielle (1)

- Nous effectuons le changement de variables et introduisons le paramètre W_B , définis par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \theta = \omega_0 t & (\text{variable que nous appellerons "angle"}) \\ u(t) = \frac{g}{\omega_0^2} U(\theta) \\ W_B = \omega_0 V_B / g \end{cases} \quad (2)$$

Par ailleurs, nous noterons simplement U' et U'' les dérivées première et deuxième de la fonction U , par rapport à θ .

6. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction U . On y fera apparaître le paramètre W_B .

1. Bien que, à proprement parler, ce ne soit pas une véritable fonction.

7. Exprimer l'angle θ_1 à partir duquel le glissement du solide (1) apparaît.

8. Nous nous plaçons sur l'intervalle angulaire $I_2 = [\theta_1, \theta_2]$ qui correspond à la phase 2 du mouvement, phase durant laquelle le solide (1) glisse sur la surface (0). θ_2 est l'angle pour lequel le glissement du solide s'interrompt. Sur cet intervalle, nous définissons la fonction F' telle que $F'(\theta) = U(\theta)$ où $\phi = \theta - \theta_1$. Par ailleurs, nous posons $\delta = f_s - f_d$ ($\delta > 0$) et $r = \delta / W_B$.

Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $F = F(\phi)$. Exprimer cette fonction. On ne fera intervenir que les paramètres W_B et δ .

o Indication : On remarquera que, sur l'intervalle I_2 , l'équation différentielle vérifiée par la fonction F est linéaire (et à coefficients constants). Lors de son intégration, on n'omettra pas de considérer que son second membre dépend de l'angle ϕ .

9. Nous notons $\Delta_{12} = \theta_2 - \theta_1$ la largeur de l'intervalle angulaire I_2 . Exprimer Δ_{12} en fonction de ϕ_2 puis $\tan(\phi_2/2)$ en fonction du paramètre r (tan désigne la fonction tangente).

10. Déterminer à quelle condition (notée C_π), portant sur le paramètre r , la largeur de l'intervalle angulaire Δ_{12} tend vers π . Puis à quelle autre condition (notée $C_{2\pi}$), portant sur le paramètre r , il tend vers 2π . Pour chacune de ces conditions, exprimer Δ_{12} en fonction de r , de façon approchée.

La condition C_π correspond au domaine des "faibles" vitesses de tirage (ou tractage) et la condition $C_{2\pi}$ celui des vitesses "élevées".

- o Indication : On effectuera un développement limité adapté à chacune des conditions C_π et $C_{2\pi}$. On ne conservera que le premier terme correctif à chacune des valeurs limites π et 2π .

- Après que le solide s'est immobilisé (en $\theta = \theta_2$), les conditions initiales sont telles qu'il ne repart pas en arrière.

11. La figure (2) représente graphiquement les fonctions : (a) $F = F(\phi)$, (b) $F' = F'(\phi)$ et (c) $X_B = W_B \times \theta$ ($\theta = \theta_1 + \phi$), correspondant à un certain jeu de paramètres. La figure (3) représente l'une des fonctions, en pleine échelle. Sur ces tracés, les fonctions (a) et (b) ne sont à considérer, physiquement, que sur l'intervalle angulaire I_2 où le solide (1) glisse sur la surface (0).

Compte tenu des différents changements de variables réalisés et paramètres introduits, gardons à l'esprit les correspondances suivantes :

- Le paramètre W_B correspond à la vitesse de tirage (V_B), adimensionnalisée ;
- Le paramètre r correspond à la différence des coefficients de frottement statique et dynamique ($f_s - f_d$), rapportée à W_B ;
- La variable θ correspond au temps (t), adimensionnalisée ;
- Les variables U et F correspondent à l'abscisse (u) du solide, adimensionnalisées ;
- La dérivée F' correspond à la vitesse (v) du solide, adimensionnalisée ;
- La différence $X_B(\theta(\phi)) - F(\phi)$ correspond à l'élongation (algébrique) du ressort, adimensionnalisée ;

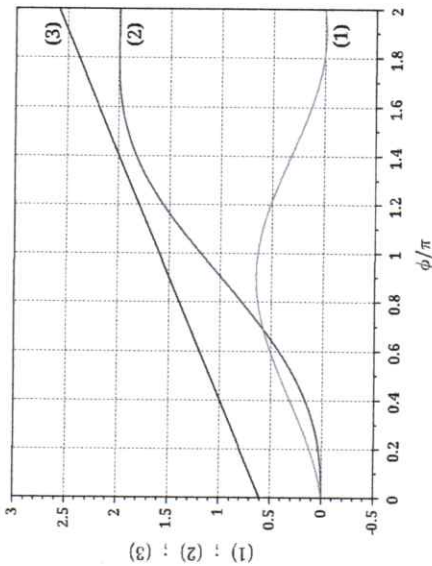


FIGURE 2 - Représentation graphique des fonctions (a), (b) et (c) pour un certain jeu de paramètres).

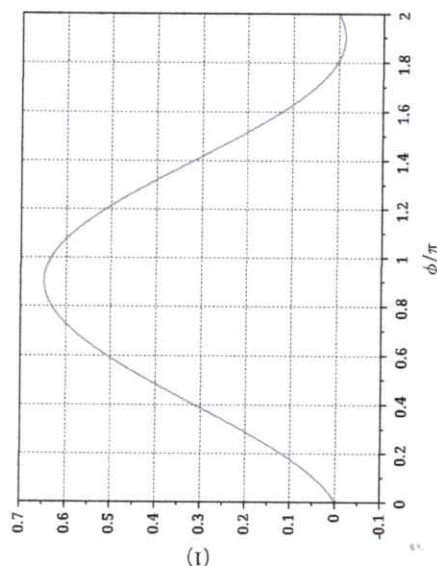


FIGURE 3 - Représentation graphique de l'une des fonctions (a), (b) et (c), en pleine échelle.

En se reportant à ces figures :

- 11.1 Associer les fonctions (a), (b) et (c) aux tracés (1), (2) et (3).
- 11.2 Indiquer dans quel état, d'extension ou de compression, le ressort (2) se trouve lorsque le solide (1) s'immobilise.
- 11.3 Estimer la valeur de W_B .

11.4 Estimer la valeur de Δ_{12}/π . Rappelons que Δ_{12} est la largeur de l'intervalle angulaire I_2 correspondant à la phase 2 du mouvement (phase de glissement).

11.5 Déduire du résultat précédent une estimation de la valeur du rapport τ .

11.6 Estimer la valeur du coefficient f_s .

11.7 Estimer la valeur de θ_1/π .

11.8 Estimer la valeur de Δ_{23}/π où Δ_{23} est la largeur de l'intervalle angulaire correspondant à la phase 3 durant laquelle le solide reste à nouveau immobile.

On indiquera le raisonnement qui a conduit à chacune des réponses données.

12. Représenter l'allure des fonctions $U = U(\theta)$ et $X_B = X_B(\theta)$ sur quelques cycles adhérence-glissement (trois, par exemple). Donner une estimation de la largeur angulaire Δ d'un tel cycle pour le jeu de paramètres correspondant à la figure (2). Situer, dans ce cas, la fréquence f_{sc} (temporelle) de ce phénomène de stick-slip par rapport à la fréquence propre f_0 de l'oscillateur mécanique.

13. On peut établir une analogie entre les oscillations de ce système mécanique et des oscillations auto-entretenues en électronique. Dans la situation que nous venons d'étudier (correspondant à la figure (2)), est-ce plutôt un oscillateur (quasi)harmonique ou un oscillateur de relaxation ? Indiquer quel élément joue ici le rôle de l'alimentation de tension continue en électronique assurant l'entretien des oscillations.

2 Application au cas du frottement d'un bâton de craie contre la surface d'un tableau.

Il s'agit, à la lumière de l'étude conduite dans la partie (1), d'estimer l'ordre de grandeur de la fréquence du son émis lors du frottement d'un bâton de craie contre la surface d'un tableau.

Un bâton de craie est un système continu qui se comporte à la fois comme une masse et comme un ressort (on parle de système à masse et raideur réparties). Il s'agit, dans une première étape, de déterminer le modèle discret masse-ressort qui lui est alors équivalent (dans un certain cadre). Nous notons ρ et E respectivement la masse volumique et le module d'élasticité du matériau (en grande partie du carbonate de calcium) constituant la craie, L_0 sa longueur et $S = h \times h = L_x \times L_z$ sa section (carrée).

2.1 Modélisation.

Cette partie est consacrée à la mise en place des modèles cinétique et élastique associés à la déformation en flexion du bâton de craie.

14. La figure (4) représente une barre de module d'élasticité E (qui a la dimension du rapport d'une force sur une surface), de section uniforme S et de longueur "à vide" ℓ_0 . Sa section inférieure (point O) est supposée rester solidaire d'un support fixe (0). Sous l'action d'une force $\vec{F} = F \vec{e}_\Delta$ agissant selon son axe Δ , sa longueur s'accroît (algébriquement) de $\ell - \ell_0$.

Exprimer, en fonction de E , S , ℓ_0 et ℓ , la force $F(\ell)$ qu'il faut appliquer à la barre pour la maintenir en situation d'équilibre correspondant à la longueur ℓ .

15. Exprimer, en fonction de E , S , ℓ_0 et ℓ , l'énergie potentielle élastique E_p emmagasinée par la barre au cours de son évolution de ℓ_0 à ℓ .

• Le bâton de craie (1) est placé verticalement. Son extrémité inférieure (point Q) est en contact avec la surface horizontale du tableau (0). Son extrémité supérieure (point B) est maintenue rigide (par un encastrement) par un support (3) qui est entraîné, parallèlement à la surface du tableau, à la vitesse constante $\vec{V}_3 = V_3 \vec{e}_x$ (ce support modélise la main tenant le bâton de craie).

Nous notons $\vec{R} = R \vec{e}_y + N \vec{e}_y$ ($N > 0$) la résultante des actions de contact qu'exerce la surface (0) sur le bâton de craie (1), au point Q. La composante N est la conséquence de l'appui du bâton de craie contre le tableau (l'action de la pesseuse n'est pas considérée). La section du bâton est carrée ($I_x = h$ et $L_z = h$). La figure (5)-(a) représente l'ensemble ((0), (1), (3)). Le paramétrage de la déformation du bâton de craie est représenté sur la figure (5)-(b).

2. Pour définir une fréquence, dans son sens strict, il faudrait observer le phénomène depuis l'élément (3).

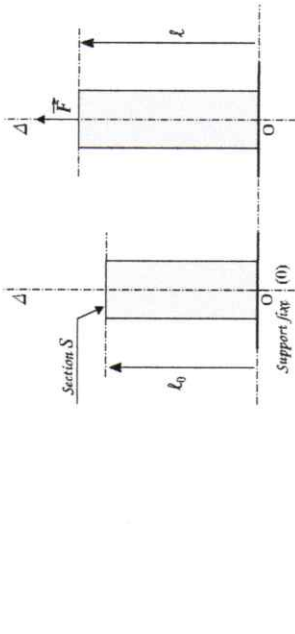


FIGURE 4 - Déformation d'une barre sollicitée en traction ou compression par une force axiale.

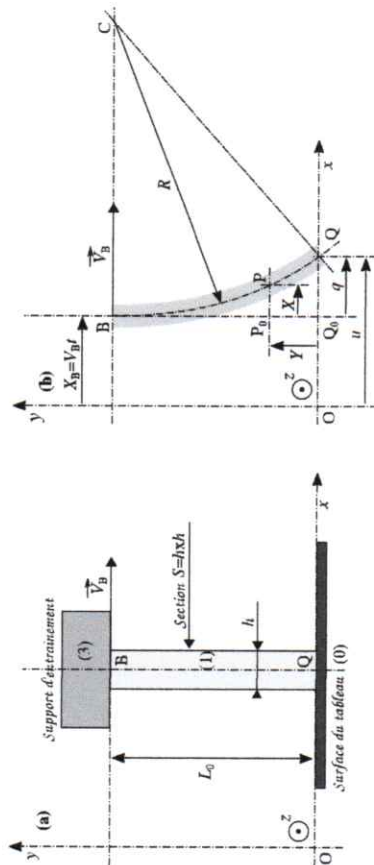


FIGURE 5 - Bâton de craie maintenu appuyé contre la surface d'un tableau et déplacé horizontalement à la vitesse $\vec{V}_B$: (a) Ensemble ((0), (1), (3)); (b) Paramétrage de la déformation en flexion du bâton de craie.

La flexion du bâton de craie étant "faible" ($|q| \ll L_0$), nous adoptons le cadre d'hypothèses suivant :

- Le bâton de craie se déforme selon un arc de cercle³. Nous notons R son rayon (rayon de courbure) et C son centre de courbure;
- La longueur de la fibre centrale (BQ) reste constante, égale à L_0 ;
- $h \ll |R|$ (par ailleurs $h \ll L_0$);
- Le déplacement de tout point P de la fibre centrale (BQ) est horizontal (selon l'axe Ox).

Les calculs qui suivront devront être effectués systématiquement dans ce cadre.

Nous notons q , variable *a priori* fonction du temps, le déplacement relatif (Q_0Q) (horizontal) du centre de la section inférieure du bâton de craie. Il est représenté arbitrairement positif sur la figure. Dans cette situation, le rayon R qui lui correspond est choisi positif.

La variable X représente le déplacement relatif (P_0P) (horizontal) d'un point courant d'ordonnée Y de la fibre centrale.

Notons que les fibres (BQ) et (EP) (figure (6)) sont, *a priori*, situées dans le plan (O, x, y) (celui de la figure). Toutes leurs homologues, situées hors de ce plan seront, bien sûr, également à considérer.

3. Dans la mesure où nous ne décrivons que le premier mode de vibration.

165 Les abscisses u et X_B correspondent à celles, de mêmes noms, qui apparaissent sur la figure (1) décrivant le système modèle.

166 16. Exprimer le déplacement relatif q en fonction de L_0 et R .

167 17. Exprimer le déplacement relatif X en fonction de q , L_0 et Y .

178 18. Nous paramétrisons la déformation du bâton de craie par la variable q . Nous ne considérons que le déplacement (horizontal) de chaque section du bâton de craie (c'est-à-dire que nous ne tenons pas compte de leur rotation). Exprimer, dans ces conditions, l'énergie cinétique E_c du bâton. On se placera dans le repère lié au support (3) (galiléen). Vérifier qu'elle prend la forme suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} M^* \dot{q}^2 \quad (3)$$

On exprimera M^* en fonction de M puis en fonction de ρ , h et L_0 .

19. Indiquer pourquoi $M^* < M$.

175 • Il s'agit maintenant de modéliser le comportement élastique de flexion du bâton de craie. La figure (6) représente ce bâton dans un état fléchi paramétré par le rayon de courbure R . Une fibre (EP) est située par rapport à la fibre centrale (BQ) (qui conserve sa longueur initiale L_0) par la variable e ($e \in]-h/2, h/2[$).

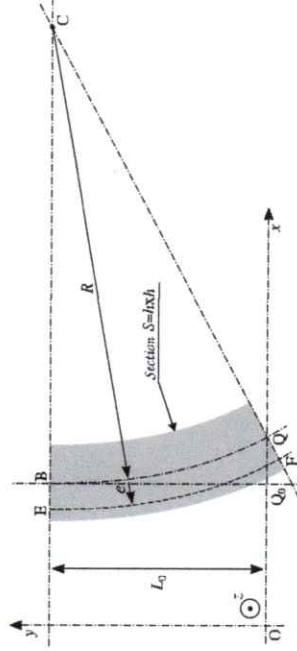


FIGURE 6 - Flexion du bâton de craie : Situation d'une fibre (EP) par rapport à la fibre centrale (BQ) dont la longueur reste égale à L_0 .

20. Exprimer la longueur $L(e)$ de la fibre (EP) en fonction de L_0 , R et e .

180 21. Sur la base du résultat établi en réponse à la question (15), exprimer l'énergie potentielle élastique E_p du bâton de craie correspondant à un rayon de courbure R . L'origine de l'énergie potentielle est choisie telle que $E_p \rightarrow 0$ pour $|R| \rightarrow +\infty$. On exprimera le résultat en fonction de E , L_0 , h et R .

22. Nous adoptons maintenant le déplacement q comme paramètre de déformation. En utilisant le résultat établi en réponse à la question (16), établir que l'énergie potentielle prend la forme suivante :

$$E_p = \frac{1}{2} k^* q^2 \quad (4)$$

On exprimera le paramètre k^* en fonction de E , L_0 et h .

185 23. Indiquer pour quelle(s) raison(s) la forme de la relation (4) était attendue.