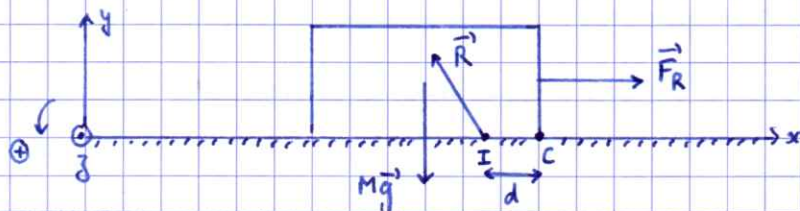


1. Etude d'un système modèle

1. Le solide est en équilibre si la somme des trois forces est nulle et si la somme des moments en un point des trois forces est nulle.



2. Théorème de la quantité de mouvement: $M\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_R = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} T + F_R = 0 \\ -Mg + N = 0 \end{cases}$
(TQDM)

Glissement atteint: $|T| = f_s N \Rightarrow F_R = f_s Mg$

Théorème scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe (z) : $Mg L_x - L_y F_R - Nd = 0$
(TSMC)
 $\Rightarrow N = \frac{Mg L_x - L_y F_R}{d}$

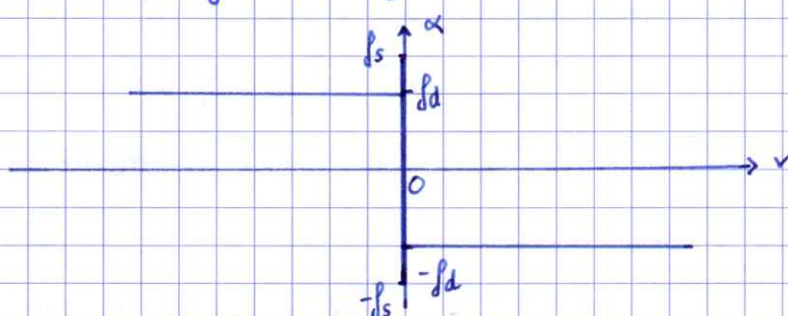
Pas de basculement tant que $N > 0 \Rightarrow Mg L_x > L_y F_R$
 $\Rightarrow \boxed{L_x > f_s L_y}$

3. On a en permanence $N = Mg$ car il n'y a pas de mouvement vertical

• Si $v = 0$: $|T| < f_s Mg \Rightarrow |\alpha| < f_s \Rightarrow -f_s < \alpha < f_s$

• Si $v > 0$: $|T| = -T = f_d Mg \Rightarrow \alpha = -f_d$

• Si $v < 0$: $|T| = T = f_d Mg \Rightarrow \alpha = f_d$



4. TQDM en projection selon Ox : $M\ddot{u} = T + F_R$
 $= \alpha Mg + k(\lambda - a)$
 $= \alpha Mg + k(x_B - x_A - a)$

On a: $\begin{cases} x_B = v_B t + x_B(0) = v_B t + Lx + a \\ x_A = u + Lx \end{cases} \Rightarrow x_B - x_A - a = v_B t + u$

Donc: $M\ddot{u} = \alpha Mg + k(-u + v_B t) \Rightarrow \boxed{\ddot{u} + \frac{k}{M} u = \alpha g + \frac{k}{M} v_B t} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}}$

5. Equation d'oscillateur harmonique avec second membre.

6. $\frac{du}{dt} = \frac{g}{\omega_0^2} \frac{dU}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{\omega_0} U'$ et $\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{g}{\omega_0} \frac{dU'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = g U''$

• $\omega_0^2 v_B t = \omega_0 v_B \theta = g W_0 \theta$

L'équation différentielle devient: $gU'' + gU = \alpha g + gW_B \theta$

Soit: $U'' + U = \alpha + W_B \theta$

7 - Apparition du glissement quand: $|T| = f_s Mg \Rightarrow F_R = f_s Mg$
 $\Rightarrow k(x_B - x_A - a) = f_s Mg$

On a: $x_B = v_B t + Lx + a$

$x_A = Lx$ car $v = 0$ tant que le glissement n'a pas débuté

Donc: $k v_B t_1 = f_s Mg$ où t_1 est l'instant d'apparition du glissement

$$t_1 = \frac{f_s Mg}{k v_B} = \frac{f_s g}{\omega_B^2 v_B}$$

Finalement: $\theta_1 = \omega_B t_1 = \frac{f_s}{W_B}$

8. $U'' + U = \alpha + W_B \theta \Rightarrow F'' + F = \alpha + W_B(\phi + \theta_1) = \alpha + W_B \phi + f_s$

Il y a glissement, donc: $\alpha = -f_d$ d'après la question 3

D'où: $F'' + F = \delta + W_B \phi$

Solution: $F(\phi) = A \cos \phi + B \sin \phi + \delta + W_B \phi$

Au début $t = t_1$ de cette phase: $v = 0$ et $v' = 0 \Rightarrow F = 0$ et $F' = 0$ pour $\theta = \theta_1$ soit $\phi = 0$

Donc: $F(0) = 0 \Rightarrow A = -\delta$ $F'(0) = 0 \Rightarrow B = -W_B$

Finalement: $F(\phi) = \delta(1 - \cos \phi) + W_B(\phi - \sin \phi)$

9. $\Delta_{12} = \theta_2 - \theta_1 = (\phi_2 + \theta_1) - \theta_1$ donc: $\Delta_{12} = \phi_2$

Le glissement cesse pour $\phi = \phi_2 \Rightarrow F'(\phi_2) = 0$ car le solide s'arrête

$$F'(\phi_2) = \delta \sin \phi_2 + W_B - W_B \cos \phi_2 = 0 \Rightarrow \delta \sin \phi_2 + W_B(1 - \cos \phi_2) = 0$$

$$\Rightarrow \delta 2 \sin \frac{\phi_2}{2} \cos \frac{\phi_2}{2} + W_B \cdot 2 \sin^2 \frac{\phi_2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \delta \cos \frac{\phi_2}{2} = -W_B \sin \frac{\phi_2}{2}$$

D'où: $\tan \frac{\phi_2}{2} = -\frac{\delta}{W_B} = -n$

10. • C_π: $\Delta_{12} = \phi_2 \rightarrow \pi \Rightarrow \tan \frac{\Delta_{12}}{2} \rightarrow -\infty \Rightarrow \underline{n \rightarrow +\infty}$ (n doit être > 0)

On pose: $\Delta_{12} = \pi + \epsilon$ ($\epsilon \ll 1 \text{ rad}$)

$$\tan \frac{\phi_2}{2} = -n \Rightarrow \tan \left(\frac{\pi + \epsilon}{2} \right) = -n \Rightarrow \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) = -n \Rightarrow -\frac{1}{\tan \frac{\epsilon}{2}} = -n$$

donc: $\tan \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{n} \approx \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \epsilon = \frac{2}{n}$ donc: $\Delta_{12} = \pi + \frac{2}{n}$

• C_{2π}: $\Delta_{12} = \phi_2 \rightarrow 2\pi \Rightarrow \tan \frac{\Delta_{12}}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow \underline{n \rightarrow 0}$

On pose: $\Delta_{12} = 2\pi + \epsilon$ ($\epsilon \ll 1 \text{ rad}$)

$$\tan \frac{\phi_2}{2} = -n \Rightarrow \tan \left(\pi + \frac{\epsilon}{2} \right) = -n \Rightarrow \tan \frac{\epsilon}{2} = -n \Rightarrow \epsilon \approx -2n$$

donc: $\Delta_{12} = 2\pi - 2n$

11.) (c) correspond à la courbe (3) car X_B est fonction affine de Φ

(b) correspond à la courbe (1) car la vitesse du solide doit être nulle au début et à la fin de la phase 2.

(a) correspond à la courbe (2)

2) Le ressort est forcément en extension quand le solide s'immobilise car $X_B - F > 0$

3) La pente de la courbe (3) est: $p = \frac{2,6 - 0,6}{2} = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{On a: } X_B = w_B \theta = w_B \theta_1 + w_B \Phi = w_B \theta_1 + w_B \pi \cdot \frac{\Phi}{\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow w_B = \frac{1}{\pi} \approx 0,3$$

4) La vitesse s'annule pour $\frac{\Phi_2}{\pi} \approx 1,8$. Donc: $\frac{\Delta_{12}}{\pi} \approx 1,8$

5) On est dans le cas $C_{2\pi}$ car Δ_{12} est proche de 2π .

$$\Delta_{12} = 2\pi - 2\pi \Rightarrow 2\pi = 2\pi - \Delta_{12} = (2 - 1,8)\pi = 0,2\pi \Rightarrow \alpha \approx 0,1\pi \approx 0,3$$

6) L'ordonnée à l'origine de la courbe (3) est $w_B \theta_1$ et vaut 0,6 $\Rightarrow w_B \cdot \frac{f_s}{w_B} = 0,6 \Rightarrow f_s = 0,6$

$$7) \frac{\theta_1}{\pi} = \frac{f_s}{\pi w_B} \Rightarrow \frac{\theta_1}{\pi} = 0,6$$

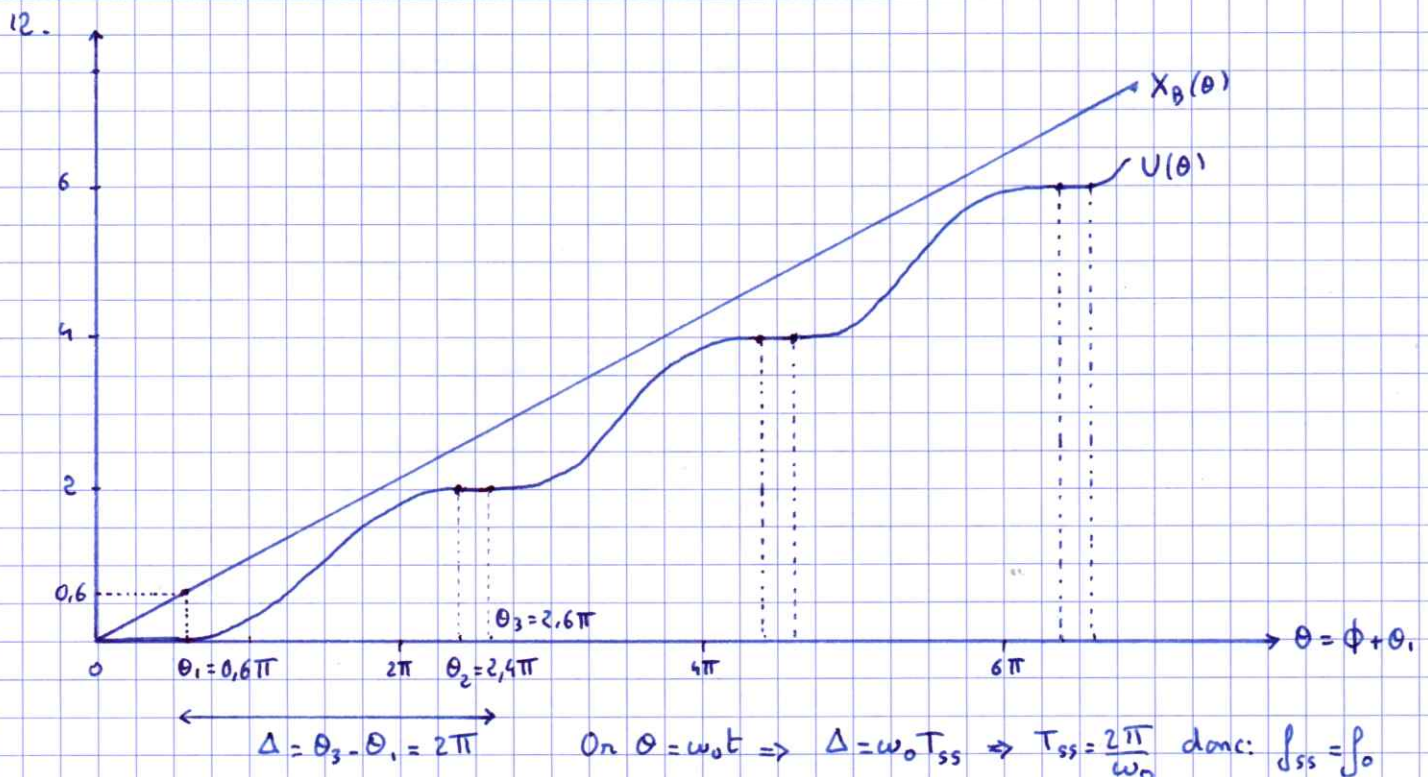
8) Pour $\Phi_2 = 1,8\pi$, le solide est à l'arrêt. On est ramené à la situation initiale.

À $t=0$, le solide ne s'est mis en mouvement que lorsque la force élastique est devenue supérieure à $1T1$. Cela correspondait à l'élongation adimensionnée $X_B(0) - F(0) = 0,6$ (d'après les courbes (2) et (3))

À partir de l'instant t_2 tel que $\Phi_2 = 1,8\pi$, le solide va rester immobile tant que l'élongation adimensionnée sera inférieure à 0,6.

L'élongation adimensionnée atteint la valeur 0,6 à l'instant t_3 tel que $\frac{\Phi_3}{\pi} = 2$

$$\text{Donc: } \frac{\Delta_{23}}{\pi} = \frac{\Phi_3}{\pi} - \frac{\Phi_2}{\pi} = 2 - 1,8 \Rightarrow \frac{\Delta_{23}}{\pi} = 0,2$$



13. Il s'agit d'un oscillateur de relaxation.

L'alimentation électrique est remplacée ici par l'opérateur qui déplace B à vitesse constante

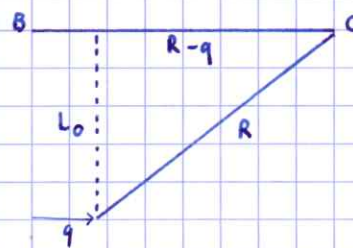
2. Application au cas d'un baton de craie contre la surface d'un tableau

14. Loi de Hooke: $F = ES \frac{l-l_0}{l_0}$

15. Travail à fournir pour allonger la barre: $W = \int_{l_0}^l F dl = \int_{l_0}^l ES \frac{l-l_0}{l_0} dl$
 $= \frac{ES}{l_0} \left[\frac{1}{2} (l-l_0)^2 \right]_{l_0}^l$
 $= \frac{1}{2} \frac{ES}{l_0} (l-l_0)^2$

La barre a donc emmagasiné l'énergie potentielle: $E_p = \frac{1}{2} \frac{ES}{l_0} (l-l_0)^2$

16. Théorème de Pythagore: $R^2 = (R-q)^2 + L_0^2$



$$\Rightarrow R^2 = R^2 - 2Rq + q^2 + L_0^2$$

$$\Rightarrow 2Rq = L_0^2 + q^2$$

On $q \ll L_0$ donc: $2Rq \approx L_0^2 \Rightarrow q \approx \frac{L_0^2}{2R}$

17. Même calcul en remplaçant L_0 par $L_0 - Y \Rightarrow X = \frac{(L_0 - Y)^2}{2R}$

Or $2R = \frac{L_0^2}{q} \Rightarrow X = \frac{(L_0 - Y)^2}{L_0^2} q$ soit: $X = \left(1 - \frac{Y}{L_0}\right)^2 q$

18. Énergie cinétique élémentaire de la tranche de barre entre Y et $Y+dY$:

$$\delta E_c = \frac{1}{2} \delta m \dot{X}^2 = \frac{1}{2} (\rho h^2 dY) \cdot \left(1 - \frac{Y}{L_0}\right)^4 \dot{q}^2$$

Énergie cinétique de la barre: $E_c = \int_0^{L_0} \delta E_c = \frac{1}{2} \rho h^2 \dot{q}^2 \int_0^{L_0} \left(1 - \frac{Y}{L_0}\right)^4 dY$
 $= \left[-\frac{L_0}{5} \left(1 - \frac{Y}{L_0}\right)^5 \right]_0^{L_0} = \frac{L_0}{5}$

Donc: $E_c = \frac{1}{2} \frac{\rho h^2 L_0}{5} \dot{q}^2$ $M^* = \frac{M}{5} = \frac{\rho h^2 L_0}{5}$

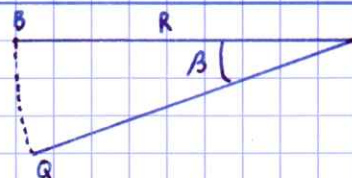
19. $\dot{q}$ est la vitesse maximale à l'extrémité inférieure de la craie.

Les points au dessus vont moins vite donc $E_c < \frac{1}{2} M \dot{q}^2$. D'où $M^* < M$

20. On a: $BQ = BR = L_0$

Et: $EF = B(R+e) = L(e)$

Donc: $L(e) = L_0 \left(1 + \frac{e}{R}\right)$



21. On considère la tranche de craie entre e et $e+de$. Son énergie potentielle élémentaire est:

$$\delta E_p = \frac{1}{2} \frac{E h de}{L_0} (L(e) - L_0)^2 = \frac{1}{2} \frac{E h de}{L_0} \left(\frac{L_0 e}{R}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{E h L_0}{R^2} e^2 de$$

D'où: $E_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta E_p = \frac{1}{2} \frac{E h L_0}{R^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e^2 de = \frac{1}{2} \frac{E h L_0}{R^2} \left[\frac{e^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} \frac{E h L_0}{R^2} \left(\frac{h^3}{24} - \left(-\frac{h^3}{24}\right) \right)$

Soit: $E_p = \frac{1}{24} \frac{E h^4 L_0}{R^2}$

22. D'après 16: $\frac{1}{R} = \frac{2q}{L_0^2}$ donc: $E_p = \frac{1}{24} E h^4 L_0 \cdot \frac{4q^2}{L_0^4} = \frac{1}{6} \frac{E h^4}{L_0^3} q^2$

donc: $E_p = \frac{1}{2} h^* q^2$ avec: $h^* = \frac{1}{3} \frac{E h^4}{L_0^3}$

23. La relation (4) a bien la forme d'une énergie potentielle élastique avec une constante de raideur k^*

24. $\omega_0^2 = \frac{k^*}{M^*}$

25. A.N: $f_0 = 3,3 \text{ kHz}$

26. TQDM au système masse-ressort, en projection selon Oxc:

$$M^* \ddot{u} = T - k^*(u - v_B t) = \alpha N - k^* u + k^* v_B t$$

D'où: $\ddot{u} + \omega_0^2 u = \frac{\alpha N}{M^*} + \omega_0^2 v_B t$

27. En comparant cette équation différentielle avec celle de la question 4: $g_{\text{eff}} = \frac{N}{M^*}$

A.N: $g_{\text{eff}} = 10^3 \text{ ms}^{-2}$

28. Par analogie entre les deux systèmes, on aura des oscillations "stick-slip" avec $f_{\text{ss}} \approx f_0 = 3,3 \text{ kHz}$
C'est un son aigu.